Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

David Baelde

ENS Cachan, L3, 2014–2015

Nous allons voir un outil pour déterminer que certaines propriétés ne sont pas définissables en logique du premier ordre. De façon liée, l'outil peut servir aussi à déterminer quand une théorie est complète.

En guise de mise en jambe, on pourra démontrer que la bonne fondaison n'est pas exprimable dans le langage des ordres discrets. On pourra aussi observer qu'il existe des structures élémentairement équivalentes mais non isomorphes, par exemple sur le langage des ordres denses.

1 Préliminaires

On se restreint aux *structures égalitaires*, c'est à dire qu'on suppose que le prédicat binaire d'égalité est dans le langage et que dans toute structure $\mathcal{S}$ on a, pour tous éléments a et b du domaine de $\mathcal{S}$:

$$a \mathrel{\hat{=}_{\mathcal{S}}} b \quad \text{ssi} \quad a = b$$

Pour rappel, on dit que deux structures sont élémentairement équivalentes, noté $\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2$, quand $\mathcal{S}_1 \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2 \models \phi$ pour toute formule close ϕ.

Définition 1.1 (Isomorphisme partiel)**.** Étant donné deux structures $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, un isomorphisme partiel de l'une dans l'autre est une fonction partielle $h : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, injective et telle que :

1. pour tout symbole de fonction f d'arité n, pour tout $a_1, \dots, a_n, a$ dans le domaine de h,

$$\hat{f}_{\mathcal{S}}(a_1, \dots, a_n) = a \quad \text{ssi} \quad \hat{f}_{\mathcal{S}'}(h(a_1), \dots, h(a_n)) = h(a).$$

2. pour tout symbole de prédicat p d'arité n, pour tout $a_1, \dots, a_n$ dans le domaine de h,

$$\hat{p}_{\mathcal{S}}(a_1, \dots, a_n) = 1 \quad \text{ssi} \quad \hat{p}_{\mathcal{S}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) = 1.$$

Définition 1.2 (Formule plate)**.** Une formule est plate si ses atomes sont de la forme $x = y$, $x = f(x_1, \dots, x_n)$ ou $p(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 1.3. Une fonction partielle $h : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ de domaine $\{a_1, \dots, a_n\}$ est un isomorphisme partiel ssi, pour toute formule atomique plate de variables libres $x_1, \dots, x_n$,

$$\mathcal{S}, \{x_i \mapsto a_i\}_i \models \phi \quad \text{ssi} \quad \mathcal{S}', \{x_i \mapsto h(b_i)\}_i \models \phi$$

Définition 1.4 (Taille, $\equiv_n$)**.** La *taille* d'une formule compte le nombre d'utilisations des connecteurs logiques, symboles de prédicats, de fonction et de variables. On dira que deux structures sont élémentairement équivalentes jusqu'à la taille n, noté $\mathcal{S}_1 \equiv_n \mathcal{S}_2$, quand $\mathcal{S}_1 \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2 \models \phi$ pour toute formule close ϕ de taille au plus n.

Définition 1.5 (Rang, $\simeq_m$)**.** Le *rang* d'une formule est le nombre maximal de quantificateurs imbriqués dans la formule. On dira que deux structures sont élémentairement équivalentes jusqu'au rang m, noté $\mathcal{S}_1 \simeq_m \mathcal{S}_2$, quand $\mathcal{S}_1 \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2 \models \phi$ pour toute formule close ϕ de rang au plus m.

On remarquera que $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}'$ ssi ($\mathcal{S} \equiv_n \mathcal{S}'$ pour tout n) ssi ($\mathcal{S} \simeq_m \mathcal{S}'$ pour tout m).

Proposition 1.6. Toute formule de taille $\leq n$ est logiquement équivalente à une formule plate de rang $\leq n$.

2 Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

2.1 Définition

Étant donné $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, un jeu de Ehrenfeucht-Fraïssé se joue entre deux joueurs, Spoiler (S) et Duplicator (D). Au début du jeu, le nombre de rondes n est annoncé. Á chaque tour, $(a_1, b_1) \dots (a_k, b_k)$ ayant été joué, le Spoiler choisit soit $a_{k+1} \in \mathcal{S}_1$ soit $b_{k+1} \in \mathcal{S}_2$, et Duplicator choisit l'autre valeur. À la fin, Duplicator gagne ssi $(a_i \mapsto b_i)_{1 \leq i \leq n}$ définit un isomorphisme partiel.

2.2 Théorème

Théorème 2.1. Les structures $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont élémentairement équivalentes ssi Duplicator a une stratégie gagnante pour tout n.

On démontre séparemment les deux directions, en s'appuyant sur la taille dans un sens et sur le rang dans l'autre sens. (En fait, on se ramène surtout à l'équivalence élémentaire pour les formules plates d'un rang donné.)

Lemme 2.2. Si le joueur D a une stratégie gagnante pour un jeu en n rondes sur $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, alors $\mathcal{S}_1 \equiv_n \mathcal{S}_2$.

Démonstration. Il suffit de le montrer pour toute formule ϕ plate et de rang au plus n. On montre plus généralement que pour toute formule plate ϕ de variables libres $x_1, \dots, x_k$ et de rang $n - k$, et pour tout isomorphisme partiel $h : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ de domaine $a_1, \dots, a_k$:

$$\mathcal{S}_1, \{x_i \mapsto a_i\}_{1 \leq i \leq k} \models \phi \quad \text{ssi} \quad \mathcal{S}_2, \{x_i \mapsto h(a_i)\}_{1 \leq i \leq k} \models \phi$$

Le cas atomique se traite par l'observation précédente, les quantificateurs se traitent en utilisant la stratégie du joueur D, et les cas propositionnels ne posent pas de problème particulier. $\square$

Lemme 2.3. Si $\mathcal{S}_1 \simeq_n \mathcal{S}_2$ alors le joueur D a une stratégie gagnante en n rondes sur $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

Démonstration. L'idée de la preuve est de construire une formule de rang n dont la satisfaction exprime que D a une stratégie gagnante. Pour $0 \leq k \leq n$, la formule $\phi_k^{b_1,\ldots,b_{n-k}}$, de rang k et de variables libres $x_1, \ldots, x_{n-k}$, va exprimer intuitivement qu'il existe une stratégie gagnante pour k rondes en supposant que $b_1, \ldots, b_{n-k}$ ont été choisis jusque là dans $\mathcal{S}_2$.

On définit $\mathcal{A}(b_1, \ldots, b_n)$ comme l'ensembles des littéraux plats A sur $x_1, \ldots, x_n$ tel que $\mathcal{S}_2, \{x_i \mapsto b_i\}_{1 \leq i \leq n} \models A$.

$$\begin{aligned}
\phi_0^{b_1,\ldots,b_n} \quad &:= \quad \bigwedge_{A \in \mathcal{A}(b_1,\ldots,b_n)} A \\
\phi_{k+1}^{b_1,\ldots,b_{n-k-1}} \quad &:= \quad (\forall x_{n-k}.\ \bigvee_{b \in \mathcal{S}_2} \phi_k^{b_1,\ldots,b_{n-k-1},b}) \\
&\qquad \wedge\ (\bigwedge_{b \in \mathcal{S}_2} \exists x_{n-k}.\ \phi_k^{b_1,\ldots,b_{n-k-1},b})
\end{aligned}$$

Écrites ainsi ces formules sont infinies. Si l'on montre que chaque conjonction est finie à équivalence logique près, on peut définir formellement les $\phi_k^{b_1,\ldots,b_{n-k}}$ comme des formules finies. On montre, par induction sur k, qu'il n'y a qu'un nombre fini de $\phi_k^{b_1,\ldots,b_{n-k}}$ à équivalence logique près, et que ϕ_k peut être définie comme une formule finie.

Occupons nous maintenant de comprendre ce que signifient ces formules. On montre :

$$\mathcal{S}_2, \{x_i \mapsto b_i\}_{1 \leq i \leq n-k} \models \phi_k^{b_1,\ldots,b_{n-k}} \text{ pour tout } b_1, \ldots, b_{n-k} \tag{1}$$

Ceci se fait aisément par induction sur k.

On construit maintenant une stratégie pour le Duplicateur dans un jeu à k rondes tel que, si les $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq n-k}$ ont été joués, alors on a l'analogue de (1) mais pour $\mathcal{S}_1$:

$$\mathcal{S}_1, \{x_i \mapsto a_i\}_{1 \leq i \leq n-k} \models \phi_k^{b_1,\ldots,b_{n-k}} \tag{2}$$

Montrons que Duplicateur peut effectivement assurer cet invariant :

- Pour $k = n$, c'est à dire au tout début du jeu, on a ϕ_n sans variable libre, et de rang n. Par hypothèse on a $\mathcal{S}_1 \simeq_n \mathcal{S}_2$ et on a vu que $\mathcal{S}_2 \models \phi_n$, on a donc bien $\mathcal{S}_1 \models \phi_n$.
- Supposons maintenant qu'on a l'invariant pour un certain $k > 0$ (c'est à dire quand il reste k rondes à jouer) :

$$\mathcal{S}_1, \{x_i \mapsto a_i\}_{1 \leq i \leq k} \models \phi_k^{b_1,\ldots,b_{n-k}}$$

  et montrons qu'on peut l'assurer pour $k - 1$.

- Si Spoiler choisit a_{n-k+1}, en considérant la satisfaction de la première composante de $\phi_k^{\cdots}$ avec x_{n-k+1} interprété par a_{n-k+1}, on obtient un $b \in \mathcal{S}_2$ tel que :

$$\mathcal{S}_1, \{x_i \mapsto a_i\}_{1 \leq i \leq n-k} + \{x_{n-k+1} \mapsto a_{n-k+1}\} \models \phi_{k-1}^{b_1,\ldots,b_{n-k},b}$$

  Autrement dit, ce b est une réponse valable de Duplicateur pour assurer l'invariant.
- Si Spoiler choisit b_{n-k+1}, en considérant la satisfaction de la seconde composante, puis du terme de la conjonction pour $b = b_{n-k+1}$, on obtient un a dans $\mathcal{S}_1$ tel que :

$$\mathcal{S}_1, \{x_i \mapsto a_i\}_{1 \leq i \leq n-k} + \{x_{n-k+1} \mapsto a\} \models \phi_{k-1}^{b_1,\ldots,b_{n-k},b_{n-k+1}}$$

  On construit la stratégie en prenant ce a comme réponse à b_{n-k+1}.

On observe enfin que cette stratégie est gagnante puisque $\phi_0^{b_1,\ldots,b_n}$, satisfaite en $\mathcal{S}_1$ avec $\{x_i \mapsto a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et en $\mathcal{S}_2$ avec $\{x_i \mapsto b_i\}_{1 \leq i \leq n}$, assure que $h : a_i \mapsto b_i$ est un isomorphisme partiel. $\square$