λ-Calcul et Logique Informatique

David Baelde
baelde@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 — Disjonction dans $\lambda\mathcal{C}$
On commence par se donner le λ calcul équipé de $\mathcal{C}$ ainsi que des constructions intuitionnistes déja vues pour la disjonction.

$$\frac{\Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash \iota_1 u : A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : B}{\Gamma \vdash \iota_2 u : A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \vee B \quad \Gamma \vdash f : A \Rightarrow C \quad \Gamma \vdash g : B \Rightarrow C}{\Gamma \vdash \mathbf{case}\ u\ f\ g : C}$$

1. Donner une preuve de $A \vee \neg A$ dans ce système. Noter qu'un **case** sur cette preuve ne se réduit pas.
2. On se propose maintenant de retrouver la disjonction. On se donne $\mathcal{C}$ mais pas les constructeurs de types et de termes correspondant à la disjonction. À la place, on les redéfinit comme du sucre syntaxique, essentiellement via les dualités de de Morgan : on pose

$$A \vee B \stackrel{\text{def}}{=} \neg A \Rightarrow \neg B \Rightarrow \bot \text{ avec comme d'habitude } \neg A \stackrel{\text{def}}{=} A \Rightarrow \bot$$

   Proposer un encodage des constructeurs ι_1 et ι_2 et du destructeur **case** dans $\lambda\mathcal{C}$ tels qu'on retrouve les règles de typage ci-dessus, et qu'on ait bien la réduction **case** $(\iota_i u)\ (\lambda x.v_1)\ (\lambda x.\ v_2) \rightarrow^* v_i[u/x]$.
3. Essayer de décrire le calcul effectué par votre encodage de **case**. Les courageux pourront considérer les réductions de **case** sur la preuve du tiers-exclu de la question 1.

Exercice 2 — Non-non traduction
On appelle *non-non traduction* d'une formule F la formule $F^{\neg\neg}$ définie comme suit, où A dénote un type atomique et F, G des types arbitraires :

$$F^{\neg\neg} \stackrel{\text{def}}{=} \neg\neg F^{\circ} \qquad A^{\circ} \stackrel{\text{def}}{=} A \qquad \bot^{\circ} \stackrel{\text{def}}{=} \bot \qquad (F \Rightarrow G)^{\circ} \stackrel{\text{def}}{=} F^{\circ} \Rightarrow G^{\neg\neg}$$

1. Montrer par un argument sémantique que F et $F^{\neg\neg}$ sont équivalentes en logique classique.
2. Construire des preuves intuitionnistes des propriétés suivantes :
   — À partir de $u : F$, construire $u^{-} : \neg\neg F$.
   — À partir de $u : F \Rightarrow G$ et $v : \neg G$, construire $u \bullet v : \neg F$.

— À partir de $u : \neg\neg\neg F$ construire $u^\circ : \neg F$.
— À partir de $u : \neg\neg(F \Rightarrow G)$ et $v : \neg\neg F$ construire $u \star v : \neg\neg G$.

3. On sait par complétude sémantique qu'on a des preuves de $F \Rightarrow F^{\neg\neg}$ et $F^{\neg\neg} \Rightarrow F$ dans $\lambda\mathcal{C}$, on veut maintenant les expliciter.

   Construire simultanément, par induction sur F, des termes $u_F : F \Rightarrow F^{\neg\neg}$ et $v_F : F^{\neg\neg} \Rightarrow F$. (Penser à utiliser la question précédente, par exemple si on a $x : F^\circ$ alors $v_F x^- : F$, et si $x : \neg\neg(G^{\neg\neg})$ alors $u_G(x^\circ) : G$.)

Exercice 3 — Preuves classiques en logique intuitionniste
On va voir que la non-non traduction permet de relier en un certain sens les logiques classique et intuitionniste.

On rappelle que $\lambda\nabla$ est la logique intuitionniste avec négation, contenant la règle suivante en plus des règles de la logique minimale :

$$\frac{\Gamma \vdash u : \bot}{\Gamma \vdash \nabla u : F}$$

1. En utilisant l'exercice précédent, construire une preuve classique de F à partir d'une preuve de $F^{\neg\neg}$ dans $\lambda\nabla$.
2. Étant donné un $\lambda\mathcal{C}$-terme u tel que $x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n \vdash u : F$, construire un $\lambda\nabla$-terme u^* tel que $x_1 : F_1^\circ, \ldots, x_n : F_n^\circ \vdash u^* : F^{\neg\neg}$. On procèdera par induction sur u.

Exercice 4 — Paradoxe de Russell
On formalise (une partie de) la théorie naïve des ensemble en ajoutant à la logique du premier ordre les constructions suivantes :
— les termes du premier-ordre $\{\ x \mid F\ \}$ représentant intuitivement un ensemble défini par compréhension ;
— les formules $t \in s$ représentant intuitivement l'appartenance ;
— les termes de preuve $I_\in$ et $E_\in$ pour introduire et éliminer les types $\in$;
— les règles de typage suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash u : F[x := t]}{\Gamma \vdash I_\in(u) : t \in \{\ x \mid F\ \}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : t \in \{\ x \mid F\ \}}{\Gamma \vdash E_\in(u) : F[x := t]}$$

— et enfin la nouvelle réduction $E_\in(I_\in(u)) \to u$.

Nous allons formaliser le paradoxe de Russell (aussi appelé paradoxe du menteur) dans ce système, et ainsi montrer son incohérence. Pour cela, on pose $S := \{\ x \mid \neg(x \in x)\ \}$.

1. Donner un terme de type $(S \in S) \Rightarrow \neg(S \in S)$.
2. En déduire un terme de type $S \in S$.
3. En déduire un terme de type $\bot$.
4. Ce terme vous rappelle-t-il quelquechose ? réduisez-le si besoin.