λ-calcul et logique informatique

David Baelde
baelde@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 — Réflexifs
Soit un espace réflexif (D, i, r), *i.e.*, on a $i : D \to [D \to D]$ et $r : [D \to D] \to D$ tels quel $i \circ r = \mathrm{id}_{[D \to D]}$. On y interprète le λ-calcul comme suit :

$$[\![x]\!]_\rho = \rho(x) \quad [\![M\ N]\!] = i([\![M]\!])([\![N]\!]) \quad [\![\lambda x.\ M]\!]_\rho = r(v \mapsto [\![M]\!]_{\rho[x:=v]})$$

1. Montrer que $[\![u]\!] = [\![v]\!]$ quand $u \to_\beta v$.
2. On dit que D est un réflexif extensionnel quand $r \circ i = \mathrm{id}_D$. Montrer qu'on a alors $[\![u]\!] = [\![v]\!]$ quand $u \to_\eta v$.

Exercice 2 — Modèle de Engeler
On définit un ensemble B d'arbres d'arbres … d'arbres de A :

$$B_0 = A \quad B_{n+1} = B_n \cup \{(\beta, b) : b \in B_n, \beta \subseteq_{\mathrm{fin}} B_n\} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Le modèle de Engeler est alors donné par le domaine $D = (\mathcal{P}(B), \subseteq)$, et les fonctions

$$i(x) = y \mapsto \{b\ :\ \exists \beta \subseteq_{\mathrm{fin}} y.\ (\beta, b) \in x\}$$
$$r(f) = \{(\beta, b) \in D\ :\ b \in f(\beta)\}$$

1. Calculer $[\![\lambda x.\ x]\!]$, $[\![\lambda x.\ \lambda y.\ x]\!]$ et $[\![\lambda x.\ x\ x]\!]$ dans ce modèle.
2. Vérifier qu'on a bien un ordre partiel complet. On pose alors $[D \to D]$ l'espace des fonctions continues. Vérifier que i et r définissent un réflexif pour ces fonctions.
3. Montrer que ce réflexif n'est pas extensionnel.

Exercice 3 — Espaces de cohérence
Un espace cohérent A est donné par un ensemble $|A|$ (appelé *trame* de l'espace) et une relation binaire réflexive et symétrique $\frown_A$ sur $|A|$. On note $C(A)$ les cliques de A, *i.e.*, les sous-ensembles de $|A|$ qui sont des cliques pour $\frown_A$. Les cliques finies sont notées $C_{\mathrm{fin}}(A)$.

Étant donné deux espaces de cohérence A_1 et A_2, leur produit cartésien $A_1\ \&\ A_2$ est l'espace cohérent de trame $A_1 \uplus A_2 = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\})$, et dont la relation de cohérence est définie par

$$(x, i) \frown_{A \& B} (x', j) \ \text{ ssi }\ i \neq j \text{ ou } x \frown_{A_i} x'$$

1. On définit l'espace des booléens $\mathbb{B}$ par la trame $\{\mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}$ et la relation de cohérence restreinte à l'identité. Quelles sont ses cliques ? Quelles sont les cliques maximales de $\mathbb{B}$ & $\mathbb{B}$?
L'intuition : un point est une observation possible, et une clique définit un objet indirectement comme un ensemble d'observations cohérentes.

On se donne quelques autres constructions d'espaces :

— $A \oplus B$ est donné par $|A \oplus B| = |A| \cup |B|$ et $\frown_{A \oplus B} = \frown_A \cup \frown_B$
— $A \Rightarrow B$ est donné par

$$|A \Rightarrow B| = \{(\alpha, b) \; : \; \alpha \in C_{\mathrm{fin}}(A), b \in |B|\}$$

$$(\alpha, b) \frown_{A \Rightarrow B} (\alpha', b') \;\text{ ssi }\; \begin{cases} \alpha \cup \alpha' \in C(A) \text{ implique } b \frown_B b' \\ \alpha \cup \alpha' \in C(A) \text{ et } \alpha \neq \alpha' \text{ implique } b \neq b' \end{cases}$$

— Si B_i est une suite croissante d'espaces de cohérence (au sens de l'inclusion des trames et des cohérences) sa limite $\lim_i(B_i)$ a pour trame l'union des trames et pour relation de cohérence l'union des relations.

On veut construire un modèle du λ-calcul sur l'espace B_∞ défini comme $\lim_i(B_i)$ pour $B_0 = \mathbb{B}$ et $B_{n+1} = B_n \oplus (B_n \Rightarrow B_n)$.

1. Montrer que $(B_\infty \Rightarrow B_\infty) \subseteq B_\infty$ et que $\frown_{B_\infty \Rightarrow B_\infty} \subseteq \frown_{B_\infty}$.
2. Soit $\gamma \in C(A \Rightarrow B)$. On pose
$$\hat{\gamma} : C(A) \to C(B), \; \alpha \mapsto \{b \; : \; \exists \alpha' \subseteq \alpha. \; (\alpha', b) \in \gamma\}$$
Montrer que cette fonction est bien définie et qu'elle est croissante et continue sur les cliques de A.
3. Montrer que $\hat{\gamma}$ est de plus une fonction *stable*, c'est à dire que pour tout $x, x' \in C(A)$ tels que $x \cup x' \in C(A)$ on a $\hat{\gamma}(x) \cap \hat{\gamma}(x') = \hat{\gamma}(x \cap x')$.
4. Soit $f : C(A) \to C(B)$ continue et stable. On dit que (α, b) est une empreinte de f si $b \in f(\alpha)$ et $b \notin f(\alpha')$ pour tout $\alpha' \subsetneq \alpha$. Montrer que si $b \in f(\alpha)$, alors il existe un unique α_0 tel que (α_0, b) soit une empreinte de f.
5. On définit la trace de f, notée $\mathrm{Tr}(f)$ comme l'ensemble de ses empreintes. Montrer que $\mathrm{Tr}(f) \in C(A \Rightarrow B)$.
6. En déduire une sémantique dénotationnelle des λ-termes. Construire, pour tout u et $\sigma : \mathrm{FV}(u) \to C(B_\infty)$, l'interprétation $[u]_\sigma \in C(B_\infty)$ tel que pour tout u, v et σ, $[u]_\sigma = [v]_\sigma$ si $u =_\beta v$.

Si l'on interprétait un λ-calcul avec booléens, l'interprétation de la négation est telle que $N(\emptyset) = \emptyset$ et $N(\{b\}) = \{\neg b\}$; c'est la fonction $\hat{\gamma_N}$ pour la clique $\gamma_N = \{(\{\mathbf{tt}\}, \mathbf{ff}), (\{\mathbf{ff}\}, \mathbf{tt})\}$.

La fonction constamment vraie, non stricte, correspond à $V(x) = \{\mathbf{tt}\}$. Dans sa version stricte on a $V'(\emptyset) = \emptyset$, $V'(x) = \{\mathbf{tt}\}$ sinon. Donner l'interprétation de la disjonction paresseuse d'abord sous forme de fonction puis sous forme de clique. Essayer de faire de même pour la disjonction parallèle, qui renvoie vrai dès qu'un de ses argument est vrai.