

## Logique

David Baelde

&lt;baelde@lsv.ens-cachan.fr&gt;

**Exercice 1 (Herbrand)**

1. Combien y a-t-il de structures de Herbrand pour
  - (1)  $\mathcal{F} = \{a(0), b(0)\}$ ,  $\mathcal{P} = \{p(1)\}$ ,
  - (2)  $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ ,  $\mathcal{P} = \{=(2)\}$  et
  - (3)  $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ ,  $\mathcal{P} = \{p(0)\}$ ?
2. Soit  $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$  et  $\mathcal{P} = \{p(1)\}$ . Donner un modèle de Herbrand pour  $\forall x. p(x) \leftrightarrow \neg p(s(x))$ .
3. Soit  $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$  et  $\mathcal{P} = \{=(2)\}$ . Skolémiser  $\forall x \exists y. x = s(y)$ . Donner un modèle de Herbrand de la formule résultante.

**Exercice 2**

Donner  $\mathcal{F}, \mathcal{P}$  et une formule satisfiable  $\phi$  qui n'admette pas de modèle fini et pas de modèle de Herbrand.

**Exercice 3 (Théorème de Löwenheim-Skolem descendant)**

Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{P}$  dénombrables. Montrer que si une  $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ -théorie admet un modèle alors elle admet un modèle (de domaine) dénombrable.

**Exercice 4 (examen 2011-2012)**

On dit que deux structures sont *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes formules du premier ordre. On pose  $\mathcal{P} = \{\geq\}$  et  $\mathcal{F} = \emptyset$ , et on considère les  $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ -structures  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  où  $\geq$  est interprété de façon canonique.

1. Montrer que  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$  ne sont pas élémentairement équivalents.
2. On va montrer que  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  sont élémentairement équivalents. Si  $\sigma$  est une substitution à valeurs dans  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{S} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ ) on note  $\geq_\sigma$  la relation d'ordre définie par  $x \geq_\sigma y$  ssi  $x\sigma \geq_{\mathcal{S}} y\sigma$ .
  - (a) Montrer que  $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$  ssi pour toute affectation  $\theta$  telle que  $\geq_\theta$  est identique à  $\geq_\sigma$ , on a  $\mathcal{S}, \theta \models \phi$ .
  - (b) Conclure.

**Exercice 5 (Théorème de Löwenheim-Skolem ascendant)**

1. Montrer que si  $E$  admet un modèle  $\mathcal{M}$  de domaine  $A$  non vide elle admet aussi un modèle dont le domaine a un élément de plus, *i.e.*,  $A \uplus \{1\}$ . Montrer que cela n'est plus vrai quand on se restreint à des modèles où le prédicat d'égalité est interprété comme l'égalité sur le domaine.
2. En déduire le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant, dans le cas où  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{P}$  sont dénombrables : si une théorie  $E$  admet un modèle de cardinalité  $\alpha \geq \aleph_0$ , alors pour tout  $\beta \geq \alpha$  la théorie  $E$  admet un modèle de cardinalité (au moins)  $\beta$ .
3. Montrer qu'on a encore ce théorème pour des modèles dans lesquels le prédicat d'égalité est interprété comme l'égalité sur le domaine du modèle. Pour cela on considèrera l'extension de  $\mathcal{F}$  et  $E$  par un grand nombre de nouvelles constantes et des axiomes spécifiant qu'elles soient distinctes.