Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1 (examen 2014)
On considère un ordre sur les littéraux, et la restriction de la règle de résolution au cas où le littéral sur lequel on résout est maximal dans chacune des deux clauses en prémisse. Avec la factorisation (inchangée) on appelle le système résultant la résolution *littéral-ordonnée*. Si E est un ensemble de formules, on note E^* l'ensemble de ses conséquences par les règles de la résolution littéral-ordonnée. On dit que E est saturé si $E = E^*$. Si S est un ensemble de clauses, on note $R_S(E)$ l'ensemble des conséquences de E par les règles de la résolution usuelle : factorisation et résolution binaire non contrainte.

1. Montrer que si E est saturé et ne contient pas $\bot$, et $U \subseteq E$ est un ensemble de clauses unitaires (ayant exactement un littéral) alors $R_U(E)$ est saturé et ne contient pas $\bot$.
2. Soit E un ensemble de clauses. Soit $U(E)$ l'ensemble de ses clauses unitaires, et $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans $U(E)$. Soit $S(E) = R_{U(E)}(E^*) \cap \mathcal{F}_0(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1)$. Soit enfin $S_1 \subseteq \mathcal{P}_1$ et $S_2 \subseteq \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1$.
   Montrer que ($S_1 \models U(E)$ et $S_2 \models S(E)$) ssi $S_1 \cup S_2 \models E$.
   (On voit ici un ensemble de littéraux positifs comme une interprétation.)
3. Montrer que si E est saturé et ne contient ni $\bot$ ni clause unitaire, et L est un littéral minimal de E, alors $E \cup \{\overline{L}\}$ est saturé.
4. Montrer que si E est fini et E^* ne contient pas $\bot$ alors E^* admet un modèle.
5. En déduire que la résolution littéral-ordonnée est réfutationnellement complète.

Exercice 2
Aucune règle n'a été donnée pour $\neg\phi$ dans LJ_0. Montrer que les règles suivantes sont *admissibles* ($\star$) si l'on lit $\neg\phi$ comme $\phi \Rightarrow \bot$:

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \psi}$$

($\star$) Une règle est *admissible* si on peut dériver sa conclusion à partir de ses prémisses en utilisant les règles de LJ_0. Pour les distinguer des règles du système, je les note en général avec une double barre.

Exercice 3
Dire lesquelles de ces formules sont prouvables dans LJ_0, en justifiant (donner une dérivation ou un contre-modèle) :

1. $\neg(P \wedge \neg P)$
2. $P \Rightarrow \neg\neg P$
3. $\neg\neg P \Rightarrow P$
4. $\neg\neg\neg P \Rightarrow \neg P$
5. $(\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$
6. $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
7. $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

Exercice 4
On considère la structure de Kripke construite comme les arbres sémantiques utilisés auparavant dans le cours. On suppose $\mathcal{P} = \{ P_i \ : \ i \in \mathbb{N} \}$. On prend comme mondes les w_I où I est une interprétation partielle de domaine $\{ P_i \ : \ i \leq n \}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On pose $\alpha(w_I) = \{ P \ : \ I(P) = 1 \}$. On pose enfin $w_I \leq w_J$ si le domaine de I est contenu dans celui de J et pour tout P dans l'intersection des deux domaines, $I(P) = J(P)$.

1. Donner une formule satisfaite dans cette structure de Kripke mais non valide en logique intuitioniste.

Exercice 5
On va montrer que le tiers exclu n'est pas dérivable dans LJ_0, sans utiliser les structures de Kripke. On considère à la place l'interprétation suivante des formules de LJ_0 dans l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle. Étant donnée une interprétation $I(p)$ des variables propositionnelles en ouverts de $\mathbb{R}$, on l'étend par induction aux formules :

- $I(\bot) = \emptyset$ et $I(\top) = \mathbb{R}$;
- $I(\phi \wedge \psi) = I(\phi) \cap I(\psi)$ et $I(\phi \vee \psi) = I(\phi) \cup I(\psi)$;
- $I(\neg\phi)$ est l'intérieur de $\mathbb{R} \setminus I(\phi)$;
- $I(\phi \Rightarrow \psi)$ est l'intérieur de $(\mathbb{R} \setminus I(\phi)) \cup I(\psi)$.

Un jugement $\Gamma \vdash P$ est dit valide si pour tout I on a $\cap_{Q \in \Gamma} I(Q) \subseteq I(P)$.

1. Montrer que le tiers exclu n'est pas valide.
2. Montrer que tout jugement prouvable dans LJ_0 est valide. En d'autres termes : LJ_0 est correct pour cette sémantique.
3. Question ouverte : existe-t-il une formule valide dans cette sémantique mais pas dans la sémantique de Kripke ? (On verra bientôt que LJ_0 est complet pour la sémantique de Kripke. On aura alors montré que LJ_0 n'est pas complet pour cette sémantique topologique.)