TD13 21 mai 2015

Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Dans ce TD, on ne considèrera que des structures qui interprètent le prédicat d'égalité comme l'égalité sur leur domaine.

Exercice 1
Soit $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{R(2), =(2)\}$. On définit $\mathcal{A}_n$ la structure consistant en un anneau orienté. On note ses sommets $s_1, \ldots, s_n$ et on a donc $s_1 \ R \ s_2 \ R \ldots s_{n-1} \ R$ $s_n \ R \ s_1$. On considère $\mathcal{S}_1 := \mathcal{A}_5$ et $\mathcal{S}_2 := \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_1$.

1. Montrer que, pour tous sommets b, b' dans le domaine de $\mathcal{S}_2$ on peut trouver deux sommets $a_i, a_j \in G$ tels que la fonction h définie par $h(a_i) = b$ et $h(a_j) = b'$ soit un isomorphisme partiel de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$.
2. Qu'en est-il pour 3 sommets ? Conclure en exhibant une formule ϕ qui distingue nos deux structures.

Exercice 2 (Non définissabilité)
On prend $\mathcal{P} = \{R(2), =(2)\}$, les modèles sont donc des graphes orientés. On souhaite établir qu'il n'existe pas de formule exprimant la connexité d'un tel graphe.

On se donne un $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On pose $\mathcal{S}_1 := \mathcal{A}_{2^n}$ et $\mathcal{S}_2 := \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_1$. On notera s_i^1, s_j^2 les sommets de $\mathcal{S}_2$ dans les copies respectives de $\mathcal{S}_1$. On note $d_i(s, s')$ la quasi-métrique (distance non symétrique) entre deux sommets s, s' dans $\mathcal{S}_i$. Cette distance est infinie quand il n'y a pas de chemin de s à s'.

1. Montrer que, pour un jeu à n tour, duplicateur a une stratégie permettant d'assurer l'invariant suivant : *si $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ sont les coups joués, alors pour tout i, j on a :*

$$\begin{array}{rl} d_1(a_i, a_j) = d_2(b_i, b_j) & \textit{si} \quad d_1(a_i, a_j) \leq 2^{n-k} \\ d_2(b_i, b_j) > 2^{n-k} & \textit{si} \quad d_1(a_i, a_j) > 2^{n-k} \end{array}$$

2. Montrer que la stratégie de la question précédente est une stratégie gagnante.
3. Conclure.

Exercice 3 (Complétude)
On considère $\mathcal{F} = \{s(1), 0(0)\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$ et la théorie $\mathcal{T}$ engendrée par les axiomes de l'égalité et :

$$\begin{array}{lllcl}
(A_1) & \forall x \forall y. & s(x) = s(y) & \rightarrow & x = y \\
(A_2) & \forall x. & x \neq 0 & \rightarrow & \exists y.\ x = s(y) \\
(A_3) & \forall x. & 0 \neq s(x) & & \\
(A_4^n) & \forall x. & x \neq s^n(x) & &
\end{array}$$

Soient M_1 et M_2 deux modèles de $\mathcal{T}$, de domaines D_1 et D_2. On note $d_i(a,b)$ la fonction définie sur $D_i \times D_i$ par $d_i(a,b) = \min\{n \in \mathbb{N} \ :\ a = s^n_{M_i}(b)\}$. Le minimum est $+\infty$ s'il n'y a pas de tels entiers.

1. Soit $i \in \{1,2\}$. Montrer que pour tout $a \in D_i$, $k \in \mathbb{N}$, on a $d_i(s^k(a), a) = k$, et que pour tout $a, b, c \in D_i$, $d_i(a,b) + d_i(b,c) < +\infty$ entraîne $d_i(a,b) + d_i(b,c) = d_i(a,c)$.
2. Montrer que pour tout $a \in D_i$, $k \in \mathbb{N}$, $d_i(a, 0_{M_i}) \geq k$, il existe un $b \in D_i$ tel que $a = s^k_{M_i}(b)$.
3. Construire, pour $n \in \mathbb{N}$, une stratégie gagnante pour le duplicateur dans le jeu de Erhenfeucht-Fraïssé à n rondes sur M_1, M_2.
4. Montrer que $\mathcal{T}$ est complète.
5. Les axiomes (A_4^n) sont-ils tous nécessaires pour la complétude ? Peut-on n'en garder qu'un sous-ensemble fini ?

Correction de la question 2. Supposons $(a_j, b_j)_{j<i}$ joués en respectant l'invariant, et S joue a_i – c'est symétrique quand S joue dans M_2. On a trois cas [1] :

- Si $a_i = s^k(a_j)$ avec $k \leq 2^{n-i}$ alors $b_i := s^k(b_j)$.
- Si $a_j = s^k(a_i)$ avec $k \leq 2^{n-i}$ alors on prend b_i tel que $s^k(b_i) = b_j$. L'existence est garantie par la question 2 car $d_1(b_j, 0) < k$ entraine $d_1(b_j, 0) = d_1(a_j, 0)$ ce qui est absurde, car c'est soit infini soit plus grand que k.
- Sinon on choisit $b_i = s^d(b)$ avec $d = 1 + 2^{n-i}$ et b à distance maximale de 0 parmi les b_j.

Vérifions que la construction est bien définie, *i.e.*, que le choix de b_i est unique.

- Il ne peut y avoir confusion dans le premier cas : si $s^k(a_j) = s^{k'}(a_{j'})$ avec $k' \leq k \leq 2^{n-i}$ alors $a_j = s^{k-k'}(a_{j'})$ (par récurrence et A1) et $d_1(a_j, a_{j'}) = k - k' \leq 2^{n-i} \leq 2^{n-i+1}$ donc $d_2(b_j, b_{j'}) = k - k'$ et $s^k(b_j) = s^{k'}(b_{j'})$.
- Il n'y a pas de confusion dans le second cas : si $s^k(a_i) = a_j$ et $s^{k'}(a_i) = a_{j'}$, alors $a_j = s^{k-k'}(s^{k'}(a_i)) = s^{k-k'}(a'_j)$ donc $b_j = s^{k-k'}(b'_j)$ et donc $s^k(x) = b_j$ et $s^{k'}(x') = b_{j'}$ impliquent $s^k(x) = s^{k-k'}(b'_j) = s^k(x')$ donc $x = x'$ par (A_1).
- Si les deux premiers cas sont rencontrés, on a $a_i = s^k(a_j)$ et $a_{j'} = s^{k'}(a_i)$ ce qui nous donne $a_{j'} = s^{k+k'}(a_j)$ donc $d_1(a'_j, a_j) = k + k' \leq 2^{n-i+1}$ et $d_2(b_{j'}, b_j) = k + k'$ donc $s^{k+k'}(b_j) = b_{j'}$ et ainsi on a bien $s^k(b_j)$ (un candidat pour b_i) qui coincide avec le k'-ème prédecesseur de $b_{j'}$ (l'autre candidat).

On vérifie ensuite l'invariant est maintenu. Une partie est triviale : si on a $d_1(a_i, a_j) \leq 2^{n-i}$ alors on a fait en sorte que $d_2(b_i, b_j) = d_1(a_i, a_j)$; de même pour $d_1(a_j, a_i) \leq 2^{n-i}$. Si on a $d_2(b_i, b_j) = k' \leq 2^{n-i}$ alors c'est qu'on est dans un des deux premiers cas :

- Si on a $d_1(a_i, a_{j'}) = k \leq 2^{n-i}$ alors $d_2(b_i, b_{j'}) = k$ par construction. Si $k \geq k'$ on a $s^{k-k'}(b_{j'}) = b_j$ donc $s^{k-k'}(a_{j'}) = a_j$ par hypothèse et on a bien $a_i = s^k(a_{j'}) = s^{k'}(a_j)$. Si $k < k'$ alors $s^{k'-k}(b_j) = b_{j'}$ donc $s^{k'-k}(a_j) = a_{j'}$ et avec $a_i = s^k(a_{j'})$ cela nous donne encore $a_i = s^{k'}(a_j)$.
- Si $d_1(a_{j'}, a_i) = k \leq 2^{n-i}$ alors on a construit b_i tel que $d_2(b_{j'}, b_i) = k$. On a donc $d_2(b_{j'}, b_j) = k + k' \leq 2^{n-i+1}$ et par hypothèse $d_1(a_{j'}, a_j) = k + k'$. On a donc $a_{j'} = s^{k+k'}(a_j)$ et $a_{j'} = s^k(a_i)$ ce qui nous donne $s^{k'}(a_j) = a_i$ par A1, et donc $d_1(a_i, a_j) = k'$.

1. Attention : pour $v \in D_i$, on écrit abusivement $s(v)$ pour $s_{M_i}(v)$.