Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1
On considère la stratégie de résolution avec sélection, au premier ordre :

$$\frac{P \vee C \quad \neg P' \vee C'}{C\sigma \vee C'\sigma} \ \sigma = \mathrm{mgu}(P, P'), f(P \vee C) = P, f(\neg P' \vee C') = \neg P'$$

On se restreint à des clauses de Horn, et à une fonction de sélection telle que $f(P \vee C) = P$ si P est un littéral positif.

1. On s'intéresse au problème suivant : étant donné un ensemble de clauses de Horn E et un littéral L, déterminer si L est conséquence logique de E. En quoi la stratégie considérée permet-elle de semi-décider ce problème ?
2. Quelles résolutions sont possibles à partir d'un ensemble de clauses contenant toutes un littéral positif ? (De telles clauses sont appelées *definite*.)
3. Quelles résolutions sont possibles à partir d'un ensemble contenant une seule clause de Horn purement négative ? Dans la suite on appellera notre stratégie la SLD-résolution : S pour sélection, L pour linéaire, et D pour *definite*.

Exercice 2
On considère $\mathcal{F} = \{a(0), b(0), c(0), d(0)\}$, $\mathcal{P} = \{\mathrm{edge}(2), \mathrm{path}(2)\}$, et l'ensemble de clauses E composé de :

$$\mathrm{edge}(a,b) \qquad \mathrm{edge}(b,c) \qquad \mathrm{edge}(c,b) \qquad \mathrm{edge}(c,d)$$
$$\forall x.\ \mathrm{path}(x,x) \qquad \forall x \forall y \forall z.\ \mathrm{edge}(x,y) \Rightarrow \mathrm{path}(y,z) \Rightarrow \mathrm{path}(x,z)$$

1. Utiliser la SLD-résolution pour montrer que $\mathrm{path}(a,b)$ est conséquence de E.
2. L'utiliser pour montrer que $\mathrm{path}(b,a)$ n'est pas conséquence de E.
3. Considérons enfin $\mathrm{path}(a,d)$. Que se passe-t-il si la recherche de SLD-dérivation se fait suivant un parcours en profondeur ? plus précisemment, on supposera que l'on essaie d'utiliser les clauses de E dans leur ordre d'introduction au début de l'énoncé.

Exercice 3
Donner un ensemble de clauses de Horn P qui définisse l'addition, sur les entiers représentés avec $\mathcal{F} = \{0, s\}$, via un prédicat $\mathrm{plus}(x,y,z)$ qui exprime “x+y=z”.

1. Vérifier $\mathrm{plus}(1,1,2)$ par SLD-résolution.
2. Que peut-on dériver à partir de $P \cup \{\forall x.\ \neg\mathrm{plus}(2,3,x)\}$?
3. Que peut-on dériver à partir de $P \cup \{\forall x.\ \neg\mathrm{plus}(2,x,3)\}$?

Exercice 4
Dans cet exercice on prend $\mathcal{F} = \{\text{nil}(0), ::(2), 0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{\text{member}(2), =(2)\}$ (on pourra rajouter des prédicats pour les besoins de l'exercice).

1. Écrire un programme logique définissant le prédicat member(e, l) exprimant que l'élément e appartient à la liste l.
2. Si on suppose que l est une liste triée d'entiers, comment peut-on en tirer parti pour optimiser le programme précédent ? (On considèrera ici une exécution Prolog standard, *i.e.*, suivant la SLD-résolution avec un parcours en profondeur.)

Exercice 5
On considère le calcul des séquents classique du premier ordre LK_1.

1. Montrer que, si la clause $\forall x_1 \ldots x_n.\, H_1 \Rightarrow \ldots H_n \Rightarrow C$ appartient à Γ, alors la règle suivante est admissible :
$$\frac{\Gamma \vdash H_1\theta \quad \ldots \quad \Gamma \vdash H_n\theta}{\Gamma \vdash C\theta}\ \text{backchain}$$
On n'oubliera pas le cas $n = 0$.
2. Montrer que cette règle est aussi complète pour les séquents de la forme $\Gamma \vdash P$ où Γ ne contient que des clauses de Horn et P est un littéral positif.

Exercice 6
On souhaite retrouver le résultat précédent sans passer par la SLD-résolution, en travaillant uniquement sur le calcul des séquents.

1. En utilisant le cours, montrer que les règles suivantes sont complètes pour dériver les séquents de la forme considérée :
$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash P, \Delta \quad \Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, P \Rightarrow \phi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, \phi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.\, \phi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, \forall x.\, \phi, \forall x.\, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.\, \phi \vdash \Delta}$$
2. Soit une dérivation de $\Gamma \vdash P$ sans contraction. Montrer qu'on peut aussi dériver $\Gamma \vdash P$ en utilisant la règle backchain seulement. Pour cela considérer la relation $<$ sur les occurrences des formules de Γ (on distingue deux occurrences de la même formule) définie par $\phi < \psi$ s'il y a un séquent $\Gamma', \psi' \vdash Q$ dans la dérivation originale avec ψ' formule descendante de ψ et Q descendant de ϕ.
3. Montrer qu'on peut restreindre la contraction aux formules initialement présentes dans Γ.
4. Conclure.