λ-calcul et logique informatique

baelde@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 — Réduction parallèle

Fin du TD précédent : montrer que la réduction parallèle conflue fortement, conclure que la β -réduction conflue.

Exercice 2 — Encodages

1. Définir un codage des paires, c'est à dire des termes **pair**, π_1 et π_2 tels que pour tout N_1 et N_2 on a :

$$\pi_i (\mathbf{pair} N_1 N_2) \rightarrow^* N_i$$

A-t-on $M =_{\beta} \mathbf{pair} (\pi_1 M) (\pi_2 M)$ pour tout M ? est-ce un problème?

2. Pour les entiers, on utilise l'encodage de Church :

$$\bar{n} = \lambda s. \lambda x. s^n x = \lambda s. \lambda x. s (s (\dots x))$$

Coder zéro, le successeur, l'addition, la multiplication, le test à zéro pour cet encodage.

3. Définir le prédécesseur pour les entiers de Church, avec **pred** $\bar{0} = \bar{0}$.
4. Donner un codage des listes, et définir la liste vide, l'ajout d'un élément en tête d'une liste, le test du vide, la concaténation et le renversement.

Exercice 3 — Stratégie interne faible

La stratégie interne faible, aussi appelée *appel par valeur*, est aussi proche que possible des langages de programmation traditionnels. Elle ne réduit jamais sous les abstractions, et ne réduit un β -redex que lorsque son argument est déjà complètement réduit — on dit alors que c'est une *valeur*.

On définit l'ensemble des valeurs V par la grammaire suivante, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des variables et Λ l'ensemble de tous les termes :

$$V := \mathcal{V}V \dots V \mid \lambda x. \Lambda$$

On définit formellement notre stratégie comme suit :

$$\frac{v \in V}{(\lambda x. u)v \triangleright u[x := v]} \quad \frac{u \triangleright u'}{uv \triangleright u'v} \quad \frac{u \in V \quad v \triangleright v'}{uv \triangleright uv'}$$

1. Utiliser le combinateur Y pour définir la fonction factorielle, de sorte que **fact** $\bar{n} \rightarrow_{\beta}^* \bar{n}!$. On rappelle la définition :

$$Y = \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$$

2. Quelles sont les réductions de **fact** (sans argument) par $\triangleright^*$? Cela pose-t-il problème? Si oui, proposer une solution.
3. Quelles sont les réductions de **fact** $\bar{0}$ par $\triangleright^*$? Cela pose-t-il problème? Si oui, proposer une solution.

Exercice 4 — Chemins sur Λ^*

On définit l'ensemble des chemins d'un terme $u \in \Lambda$, noté $\mathcal{C}(u)$, comme l'ensemble des objets p tels que $p \prec u$ est dérivable dans le système suivant :

$$\frac{}{x \prec x} \quad \frac{P \prec M}{\mathbf{L} P \prec M N} \quad \frac{P \prec N}{\mathbf{R} P \prec M N} \quad \frac{P \prec M}{\lambda x.P \prec \lambda x.M}$$

On travaille modulo α , en renommant implicitement les variables liées pour pouvoir appliquer la règle de passage sous l'abstraction. Par conséquent, deux termes α -équivalents ont les mêmes chemins, et l'ensemble des chemins d'un terme est clos par α -équivalence.

1. Donner les chemins des termes $\lambda x. x y$, $\lambda x. x x$, et $\lambda x. (\lambda y. y) x$.
2. Que peut-on dire de deux termes qui ont les mêmes chemins?
3. On étend notre définition de chemins à Λ^* en rajoutant la règle suivante :

$$\frac{P \prec M \quad Q \prec N}{P[x := Q] \prec (\lambda^*x. M) N}$$

Montrer que $M \rightarrow N$ implique $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(N)$, où $\rightarrow$ est la réduction de Λ^* qui ne touche qu'aux redexes annotés d'une étoile.

4. Montrer la réciproque : $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(N)$ implique $M \leftrightarrow^* N$, c'est à dire la convertibilité dans Λ^* .