λ-calcul et logique informatique

baelde@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1
Parmi les termes suivants, indiquer lesquels sont α-équivalents et lesquels sont β-équivalents :

1. $(\lambda x.\ \lambda y.\ x)\ x$
2. $\lambda x.\ x$
3. $(\lambda x.\ \lambda x.\ x)\ x$
4. $(\lambda x.\ \lambda y.\ y)\ x$
5. $(\lambda x.\ \lambda y.\ y)\ (\lambda x.\ x)$

Exercice 2
Dans la suite, l'égalité dénote la β-équivalence.

1. Caractériser les termes M et N clos et β-normaux qui rendent l'équivalence vraie :
$$(\lambda x.\ \lambda y.\ M\ x) = (\lambda x.\ \lambda y.\ N\ y)$$
2. Donner une infinité de termes M clos et β-normaux tels que :
$$(\lambda z.\ \lambda s.\ s\ (M\ s\ z)) = (\lambda z.\ \lambda s.\ M\ s\ (s\ z))$$

Exercice 3 (Booléens)
On code les booléens comme des projections dans le λ-calcul :

$$\begin{array}{rcl} [\top] & = & \lambda x.\lambda y.x \\ [\bot] & = & \lambda x.\lambda y.y \end{array}$$

Donner les encodages de la conjonction, la disjonction et la négation. Formellement, on cherche par exemple un terme A tel que $A\ [b]\ [b'] = [b \wedge b']$ pour tous booléens b et b'.

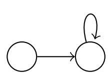
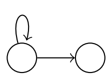
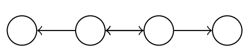
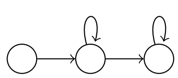
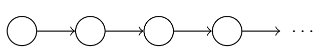
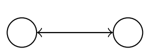
Exercice 4 (Réduction parallèle)
Dans cet exercice, la flèche simple $\to$ dénote la β-réduction. On définit la réduction parallèle comme suit :

$$\frac{u \Rrightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\,\text{app} \qquad \frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x.u \Rightarrow \lambda x.u'}\,\text{abs}$$

$$\frac{}{u \Rightarrow u}\,\text{refl} \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x.u)v \Rightarrow u'[x := v']}\,\text{beta}$$

1. Montrer les inclusions suivantes en donnant des exemples illustrant qu'elles sont strictes :
$$\to \subseteq \Rightarrow \subseteq \to^*$$
2. Montrer que $\Rightarrow$ est fortement confluente.
3. En déduire que $\to$ est confluente.

Exercice 5 (Graphes de réduction)
Pour chacun des graphes suivants, trouver un λ-terme qui a pour graphe de réduction ce graphe.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8.