Devoir de λ-calcul 2015

(Version 4 du 30 avril)

$\mathbf{NJ}_1^{\equiv}$

<david.baelde@lsv.ens-cachan.fr>

À rendre le 5 mai

Nous nous intéressons à la logique du premier ordre, sur un ensemble de symboles de fonction $\mathcal{F}$ et un ensemble de symboles de prédicats $\mathcal{P}$. Nous considérons la possibilité d'identifier les termes et formules selon une certaine relation $\equiv$. Plus précisemment, nous prendrons le système vu en cours pour la logique intuitionniste du premier ordre (incluant le faux, la conjonction et la disjonction) et nous ajoutons une règle de *conversion* permettant de changer un type F en G quand $F \equiv G$. Le système résultant est donné en Figure 1.

On notera Λ l'ensemble de ses termes de preuve, et $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ l'ensemble des termes du premier ordre (pas forcément clos) construits sur $\mathcal{F}$. Les éléments de Λ seront notés u, v, etc. tandis que les éléments de $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ seront notés s, t, etc. On distinguera de même deux sortes de variables : les variables “de preuve” notées x, y, z, etc. sont destinées à être instantiées en des λ-termes de Λ ; les variables “de terme” notées i, j, etc. sont destinées à être instantiées en des termes de $\mathcal{T}(\mathcal{F})$. Dans cet énoncé, la notation $\mathrm{FV}(u)$ est uniquement utilisée pour les variables de terme libres dans u. Pour parler des variables de preuve libres, on utilisera la notation $\mathrm{FV}_\Lambda(u)$.

Dans tout l'énoncé on suppose que la relation $\equiv$ est une congruence (i.e., $P \equiv P'$ entraîne $C[P] \equiv C[P']$ pour tout contexte) compatible avec la substitution (i.e., $P \equiv P'$ entraîne $P\theta \equiv P'\theta$) et qui contienne l'α-renommage (i.e., $P =_\alpha P'$ entraîne $P \equiv P'$).

Question 1

Dans cette question les termes sont construits sur la constante 0 et la fonction successeur notée s. On se permettra d'écrire directement un entier n au lieu du terme $s^n(0)$ qui le représente. On considère de plus qu'on dispose du symbole de fonction binaire $+$ et le prédicat binaire d'égalité $=$, pour lesquels on utilisera la notation infixe usuelle.

On suppose que la congruence satisfait les équations suivantes :

$$0 + x \equiv x \qquad s(x) + y \equiv s(x + y) \qquad x + y \equiv y + x \qquad (x = x) \equiv \top$$

$$(s(x) = s(y)) \equiv (x = y) \qquad (0 = 0) \equiv \top \qquad (0 = s(x)) \equiv \bot \qquad (x = y) \equiv (y = x)$$

Merci RB !

Montrer que les types suivants sont habités en $\mathbf{NJ}_1^{\equiv}$ (on donnera les dérivations de typage et pas seulement les termes, en précisant quelles équations ci-dessus sont utilisées) :

(a) $2 + 3 = 5$

(b) $\forall i.\ 2 + i = 1 + (1 + i)$

(c) $1 + 1 = 0 \Rightarrow 16 + 64 = 42$

(d) $\forall i.\ i = 2 \Rightarrow 1 + i = 3$

$$\frac{(x:A)\in\Gamma}{\Gamma\vdash x:A}\qquad\frac{\Gamma\vdash u:Q\quad P\equiv Q}{\Gamma\vdash u:P}$$

$$\frac{}{\Gamma\vdash\langle\rangle:\top}\qquad\frac{\Gamma\vdash u:\bot}{\Gamma\vdash\nabla u:P}$$

$$\frac{\Gamma,x:P\vdash u:Q}{\Gamma\vdash\lambda x.\,u:P\Rightarrow Q}\ (x\text{ frais})\qquad\frac{\Gamma\vdash u:P\Rightarrow Q\quad\Gamma\vdash v:P}{\Gamma\vdash u\,v:Q}$$

$$\frac{\Gamma\vdash u_1:P_1\quad\Gamma\vdash u_2:P_2}{\Gamma\vdash\langle u_1,u_2\rangle:P_1\wedge P_2}\qquad\frac{\Gamma\vdash u:P_1\wedge P_2}{\Gamma\vdash\pi_i u:P_i}$$

Merci HM&NM !

$$\frac{\Gamma\vdash u:P_i}{\Gamma\vdash\iota_i u:P_1\vee P_2}\qquad\frac{\Gamma\vdash u:P_1\vee P_2\quad\Gamma,x:P_1\vdash v_1:Q\quad\Gamma,y:P_2\vdash v_2:Q}{\Gamma\vdash\text{case }u\ \{\iota_1x\mapsto v_1,\iota_2y\mapsto v_2\}:Q}\ (x,y\text{ frais})$$

$$\frac{\Gamma\vdash u:P}{\Gamma\vdash\lambda i.\,u:\forall i.\,P}\ (i\text{ frais})\qquad\frac{\Gamma\vdash u:\forall i.\,P}{\Gamma\vdash u\,t:P[i:=t]}$$

$$\frac{\Gamma\vdash u:P[i:=t]}{\Gamma\vdash\iota t u:\exists i.\,P}\qquad\frac{\Gamma\vdash u:\exists i.\,P\quad\Gamma,x:P\vdash v:Q}{\Gamma\vdash\text{case }u\ \{\iota i x\mapsto v\}:Q}\ (i,x\text{ frais})$$

FIGURE 1 – Règles de typage de $\mathbf{NJ}_1^{\equiv}$

Correction 1
Cette question préliminaire n'a posé de problème à personne, à part quelques étourdis. A noter : la congruence est transitive et on n'était pas obligé d'utiliser trois applications de la règle de conversion pour changer $2+3$ en 5.

Question 2
On reprend le langage et la congruence de la question précédente, et on ajoute le prédicats unaire N ainsi que l'équation $N(i)\equiv(i=0\vee\exists j.\ i=s(j)\wedge N(j))$. Démontrer $\forall i.\ N(i)\Rightarrow N(s(i))$ en $\mathbf{NJ}_1^{\equiv}$. (Donner un terme de preuve.)

Merci HM&RB !

Correction 2
Il fallait être prudent pour voir que l'autre implication ne passe pas. Mais prouver l'implication qui passe n'a pas posé de problème. Le terme de preuve le plus simple était $\lambda i.\lambda x.\iota_2\iota i\langle\langle\rangle,x\rangle$.

Question 3
On suppose qu'on dispose d'un prédicat p d'arité 0 tel que $p\equiv(p\Rightarrow\bot)$. Montrer $\bot$ en $\mathbf{NJ}_1^{\equiv}$.

Correction 3
Le terme de preuve était notre cher Ω, et son typage ne posait pas particulièrement de problème. Attention, montrer $\bot$ veut dire trouver un terme u de type $\bot$ *dans l'environnement vide* (autrement dit, u doit être clos).

1 Méta-théorie

On étudie maintenant $\mathbf{NJ}_1^{\equiv}$ de façon générale : on considère une relation $\equiv$ quelconque, et on se demande sous quelles conditions on peut assurer l'auto-réduction, la forte normalisation, et la cohérence. Pour cette partie, on restreint le langage des types à l'implication et la quantification universelle. Les termes de preuve sont restreints de façon correspondante aux variables, abstractions et applications. On ne garde comme règles de typage que la conversion, l'axiome, et les règles d'introduction et d'élimination pour $\Rightarrow$ et $\forall$.

On définit $\rightarrow_\beta$ comme la plus petite congruence telle que :

$$(\lambda x.\, u)\; v \rightarrow_\beta u[x := v] \qquad\qquad (\lambda i.\, u)\; t \rightarrow_\beta u[i := t]$$

1.1 Formes normales

Question 4
On suppose que $\equiv$ est *sans confusion*, c'est à dire que si $P \equiv Q$ où P et Q sont des formules non atomiques, alors le connecteur logique le plus externe dans P est le même que dans Q. (Par exemple, cela interdit d'avoir $P \vee P' \equiv Q \wedge Q'$ ou $P \wedge Q \equiv \top$.) Montrer, dans ce cas, qu'il n'existe pas de terme u en forme normale tel que $\vdash u : \bot$.

Correction 4
Cette question a le plus souvent été mal traitée, ou au moins mal rédigée !

On remarque que les termes bien typés en forme normale s'écrivent $\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\, y\; v_1 \ldots v_m$ où y est une variable de preuve, les v_i sont soit des termes de preuve soit des termes de $\mathcal{T}(\mathcal{F})$, et les x_i sont soit des variables de preuve soit des variables de terme. Ceci se démontre aisément, par induction sur le terme :

- si le terme est une variable, il est dans le format annoncé ;
- si c'est une abstraction, le corps de l'abstraction doit être normal donc par hypothèse d'induction il est de la forme annoncée, et on conclut ;
- si le terme est une application uv ou ut alors u est encore normal et donc, par hypothèse d'induction, il est de la forme annoncée. Si notre terme est uv alors u ne peut être une abstraction $\lambda x.\, u'$, sinon le terme serait non normal, et il ne peut pas non plus être de la forme $\lambda i.\, u'$ sinon il serait mal typé, car $\forall i.\, P \equiv P' \Rightarrow Q'$ est exclu.

Montrons maintenant qu'il n'existe pas de terme clos u en forme normale et de type $\bot$. Comme u est sans variable libre, y doit être une variable de preuve x_i et donc $n > 0$, donc le terme commence par une abstraction. Mais alors pour que u ait le type $\bot$ il faudrait avoir $\bot \equiv T \Rightarrow T'$ ou $\bot \equiv \forall i.\, T'$, ce qui est exclu par hypothèse de non-confusion.

1.2 Auto-réduction

On admettra le lemme de substitution usuel, qui se démontre aisément : si $\Gamma, x : P \vdash u : Q$ et $\Gamma \vdash v : P$ sont dérivables, alors $\Gamma \vdash u[x := v] : Q$ l'est aussi. On admettra aussi le lemme d'affaiblissement : $\Gamma \vdash u : P$ entraîne $\Gamma, x : Q \vdash u : P$.

Question 5
Démontrer que si $\Gamma \vdash u : P$ est dérivable, alors $\Gamma[i := t] \vdash u[i := t] : P[i := t]$ l'est aussi.

Correction 5
On procède par induction sur la dérivation de typage. Il y a six règles à considérer.

- Il n'y a rien à dire pour les trois règles propositionnelles, où il ne se passe rien de notable concernant la substitution.
- Si la règle de conversion est utilisée on conclut par hypothèse d'induction car $P \equiv Q$ entraîne $P[i := t] \equiv Q[i := t]$.
- Pour l'élimination du quantificateur universel, on a $u = u'\ t'$, $\Gamma \vdash u' : \forall j.\ Q$ et $P = Q[j := t']$. Par α-renommage on peut supposer que j n'apparaît pas dans t ni t', et est différent de i. Par hypothèse d'induction on a $\Gamma[i := t] \vdash u'[i := t] : \forall j.\ Q[i := t]$ à partir de quoi on obtient :

  $$\Gamma[i := t] \vdash (u'[i := t]\ t'[i := t]) : Q[i := t][j := t'[i := t]]$$

  On conclut car $P[i := t] = Q[j := t'][i := t] = Q[i := t][j := t'[i := t]]$, la dernière égalité étant justifiée par les hypothèses prises sur j.
- Le dernier cas à considérer est celui de l'introduction du $\forall$: on a $u = \lambda j.\ u'$, $P = \forall j.\ P'$ et $\Gamma \vdash u' : P'$. Par renommage on suppose $i \neq j$ [1] Par hypothèse d'induction, $\Gamma[i := t] \vdash u'[i := t] : P'[i := t]$. En appliquant la règle d'introduction du $\forall$ on obtient alors $\Gamma[i := t] \vdash u[i := t] : P[i := t]$.

Question 6
On s'intéresse à la propriété d'auto-réduction, i.e., si $\Gamma \vdash u : P$ et $u \to_\beta v$, alors $\Gamma \vdash v : P$. Cette propriété n'est pas vraie en général :

- donner un contre-exemple,
- proposer une condition simple sur $\equiv$ qui permette de garantir l'auto-réduction,
- donner une preuve d'auto-réduction sous cette hypothèse supplémentaire.

Correction 6
On se donne comme hypothèse supplémentaire que $P \Rightarrow Q \equiv P' \Rightarrow Q'$ entraîne $P \equiv P'$ et $Q \equiv Q'$, et de même pour la quantification universelle, et les autre connecteurs et quantificateurs.

Sans cette hypothèse on a un contre-exemple de l'auto-réduction : avec $\Gamma = (f : i \Rightarrow u \Rightarrow t,\ c : j,\ d : u)$, et $i \Rightarrow t \equiv j \Rightarrow t$ (mais pas $i \equiv j$) on a $\Gamma \vdash (\lambda x.\ f\ x\ d)\ c : t$ mais pas $\Gamma \vdash (f\ c\ d) : t$.

On procède par induction sur la dérivation de typage de $\Gamma \vdash u : P$.

- La première règle ne peut être un axiome car alors u serait une variable et ne pourrait se réduire.
- Si la première règle est une conversion, on a une sous-dérivation qui établit $\Gamma \vdash u : Q$ pour $Q \equiv P$. Par hypothèse d'induction, $\Gamma \vdash v : Q$ et on conclut par conversion.
- Si la première règle est l'introduction d'une implication alors $u = \lambda x.\ u'$ et $P = P_1 \Rightarrow P_2$. Nécessairement, $v = \lambda x.\ v'$ avec $u' \to_\beta v'$. Par hypothèse d'induction, $\Gamma, x : P_1 \vdash v' : P_2$ et donc $\Gamma \vdash v : P_1 \Rightarrow P_2$.
- Si la dérivation commence par une élimination de l'implication, on a $u = u_1\ u_2$, $\Gamma \vdash u_1 : Q \Rightarrow P$ et $\Gamma \vdash u_2 : Q$. Si u n'est pas un redex, alors la réduction a lieu dans un sous-terme, et on conclut aisément par hypothèse d'induction sur ce sous-terme. Sinon $u_1 = \lambda x.\ u_1'$ et

1. J'acceptais ici que très peu soit dit (car ce n'est pas beaucoup plus compliqué que l'α-renommage qu'on accepte implicitement sur les termes de preuve) mais le mieux était de justifier ce renommage par une application de l'hypothèse d'induction avec la substitution $[j := k]$, en observant de plus que la preuve produite est de même hauteur que l'originale, et peut donc être de nouveau utilisée dans l'hypothèse d'induction suivante.

$v = u_1'[x := u_2]$. La dérivation de typage pour u_1 peut commencer par un certain nombre de conversions, mais doit finalement introduire cette abstraction : on a, en toute généralité, une sous-dérivation $\Gamma, x : Q' \vdash u_1' : P'$ avec $Q \Rightarrow P \equiv Q' \Rightarrow P'$. Grâce à notre hypothèse on en déduit $Q \equiv Q'$, ce qui nous permet de dériver $\Gamma \vdash u_2 : Q'$, et ainsi $\Gamma \vdash v : P'$ par le lemme de substitution usuel (qu'on pouvait admettre, ou redémontrer facilement), puis de conclure en utilisant de nouveau l'hypothèse pour obtenir $P \equiv P'$.
– Le cas de l'élimination du quantificateur universel est similaire.

1.3 Normalisation forte

Nous allons démontrer la forte normalisation de façon générique par rapport à $\equiv$. On note $\mathbf{SN}$ l'ensemble des termes fortement normalisants. On note $\mathbf{CR}$ l'ensemble des *candidats de réductibilité* : un candidat est un ensemble X de termes de preuve de $\mathbf{NJ}_1^{\equiv}$ satisfaisant (CR1) $X \subseteq \mathbf{SN}$, (CR2) si $u \in X$ et $u \to_\beta v$ alors $v \in X$, et (CR3) si u est neutre (i.e., pas de la forme $\lambda x.\ u'$ ni $\lambda i.\ u'$) et que tous ses réduits immédiats par $\to_\beta$ sont dans X alors $u \in X$.

Une *structure* sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ est donnée par :
- un ensemble non vide D appelé domaine ;
- pour chaque $f \in \mathcal{F}$ d'arité n, une fonction $\hat{f} : D^n \to D$;
- pour chaque $p \in \mathcal{P}$ d'arité n, une fonction $\hat{p} : D^n \to \mathbf{CR}$.

Dans la suite de cette section, on suppose fixée une certaine structure.

On définit ensuite l'interprétation des termes et formules dans une structure. Étant donné un terme t et une valuation σ qui à toute variable libre de t associe un élément de D (i.e., $\mathrm{FV}(t) \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$ et $\mathrm{Img}(\sigma) \subseteq D$) on définit $|t|_\sigma$ par induction sur t :

$$|x|_\sigma = \sigma(x) \quad \text{et} \quad |f(t_1, \ldots, t_n)|_\sigma = \hat{f}(|t_1|_\sigma, \ldots, |t_n|_\sigma).$$

Enfin, on définit $|P|_\sigma$ pour une formule P et une valuation σ telle que $\mathrm{FV}(P) \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$:

$$\begin{array}{rcl}
|p(t_1, \ldots, t_n)|_\sigma & = & \hat{p}(|t_1|_\sigma, \ldots, |t_n|_\sigma) \\
|P \Rightarrow Q|_\sigma & = & \{\ u \in \mathbf{SN}\ :\ u \to_\beta^* \lambda x.\ u' \text{ entraîne} \\
 & & \qquad u'[x := v] \in |Q|_\sigma \text{ pour tout } v \in |P|_\sigma\ \} \\
|\forall i.\ P|_\sigma & = & \{\ u \in \mathbf{SN}\ :\ u \to_\beta^* \lambda i.\ u' \text{ entraîne} \\
 & & \qquad u'[i := t] \in |P|_{\sigma + (i \mapsto v)} \text{ pour tout } t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) \text{ et } v \in D\ \}
\end{array}$$

Question 7
Montrer que pour tout P et σ tel que $\mathrm{FV}(P) \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$, $|P|_\sigma$ est un candidat de réductibilité.

Correction 7
Par définition d'une structure, l'interprétation d'un prédicat est toujours un candidat. On traite désormais le cas des formules non atomiques. La condition (1) est évidente, puisque l'interprétation d'une formule est un sous-ensemble de $\mathbf{SN}$. La condition (2) est aussi immédiate de par la forme des deux définitions. On détaille pour l'implication. Supposons $u \in |P \Rightarrow Q|_\sigma$ et $u \to_\beta v$. On a bien $v \in \mathbf{SN}$. De plus, si v se réduit en un terme $\lambda x.\ u'$ alors u aussi et la condition sur u' est remplie. On traite enfin la condition (3) pour l'implication, l'autre cas étant similaire. Si l'on prend un terme neutre u dont tous les réduits sont dans $|P \Rightarrow Q|_\sigma$ alors d'une part ce terme neutre est $\mathbf{SN}$ et, d'autre part,

si on a $u \to_\beta^* \lambda x.\ u'$ alors la réduction ne peut être vide et on peut ainsi conclure par le fait que les réduits de u sont dans $|P \Rightarrow Q|_\sigma$.

Question 8
Montrer que $u \in |P \Rightarrow Q|_\sigma$ et $v \in |P|_\sigma$ entraînent $(u\ v) \in |Q|_\sigma$.

Correction 8
On utilise la condition (3) des candidats de réductibilité. On montre pour cela que tout réduit de $u\ v$ est dans $|Q|_\sigma$. On procède par induction sur le fait que u et v sont $\mathbf{SN}$. Si le réduit provient d'un redex dans u ou v on conclut ainsi aisément. Sinon c'est que $u = \lambda x.\ u'$, et le réduit est $u'[x := v]$. Mais alors par définition de $|P \Rightarrow Q|_\sigma$ on a que le réduit est dans $|Q|_\sigma$ et donc $\mathbf{SN}$.

Question 9
Montrer que $u \in |\forall i.\ P|_\sigma$ entraîne $(u\ (t\rho)) \in |P[i := t]|_\sigma$ pour tout terme t tel que $\mathrm{FV}(t) \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$ et toute substitution $\rho : \mathrm{FV}(t) \to \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Énoncé renforcé.

Correction 9
On utilise un argument similaire au précédent. Dans le cas de base (où l'on a un redex à la racine) on se retrouve avec un réduit $u'[i := t\rho]$. Par hypothèse on a $u'[i := t\rho] \in |P|_{\sigma+(i\mapsto v)}$ pour tout v. Pour conclure, il suffit de choisir $v = |t|_\sigma$ en observant $|P|_{\sigma+(i\mapsto|t|_\sigma)} = |P[i := t]|_\sigma$ (ce qui se démontre par une simple induction).

On dit qu'une structure est *adéquate* vis-à-vis de $\equiv$ si, pour toutes formules P et Q, $P \equiv Q$ entraîne, pour tout σ, $|P|_\sigma = |Q|_\sigma$.

Question 10
On suppose que la structure est adéquate pour $\equiv$. Soit une dérivation de $\Gamma \vdash u : P$ et des valuations
- $\sigma : \mathrm{FV}(\Gamma, P) \to D$,
- θ telle que pour tout $(x : Q) \in \Gamma$, $\theta(x) \in |Q|_\sigma$,
- et $\rho : \mathrm{FV}(u) \to \mathcal{T}(\mathcal{F})$.

Montrer $u\rho\theta \in |P|_\sigma$.

Correction 10
On procède par induction sur la dérivation de typage. Le cas de l'axiome est immédiat. Le cas de la conversion se conclut par adéquation de la structure. Pour les éliminations, c'est essentiellement les questions précédentes une fois qu'on a poussé les substitutions comme il faut. Par exemple, si $u = u'\ t$ et $P = Q[i := t]$, on a par hypothèse d'induction $u'\rho\theta \in |\forall i.\ Q|_\sigma$ d'où l'on conclut par la question précédente (modifiée !) $(u'\rho\theta\ t\rho) \in |Q|_{\sigma+(i\mapsto|t|_\sigma)}$ c'est à dire $u\rho\theta \in |P|_\sigma$. Reste les introductions :
- On détaille l'introduction au premier ordre : $u = \lambda i.\ u'$ et $P = \forall i.\ Q$. Par hypothèse d'induction $u'\rho[i := i]\theta \in |Q|_{\sigma+(i\mapsto v)}$ (pour une valeur quelconque $v \in D \neq \emptyset$) et donc $u'\rho\theta \in \mathbf{SN}$, et de même pour $u\rho\theta$. Montrons maintenant que $u\rho\theta \to_\beta^* \lambda i.\ u''$ entraîne $u''[i := t] \in |Q|_{\sigma+(i\mapsto v)}$ pour tous t et v. Considérons une telle réduction, et t, v arbitraires. On a $u'\rho\theta \to_\beta^* u''$, et $u'\rho[i := t]\theta \to_\beta^* u''[i := t]$. En appliquant de nouveau l'hypothèse d'induction, cette fois avec $\rho[i := t]$ et $\sigma + (i \mapsto v)$, on obtient $u'\rho[i := t]\theta \in |Q|_{\sigma+(i\mapsto v)}$ puis, par CR2, $u''[i := t] \in |Q|_{\sigma+(i\mapsto v)}$, ce qu'il fallait démontrer.
- Le cas de l'implication est similaire. On a $u = \lambda x.\ u'$, $P = P_1 \Rightarrow P_2$. Par hypothèse d'induction, $u'\rho\theta[x := x] \in |P_2|_\sigma$ — on a étendu θ en $\theta[x := x]$ ce qui est valide car $x \in |P_1|_\sigma$.

Ainsi $u'\rho\theta$ est fortement normalisant et $u\rho\theta$ de même. Considérons maintenant une réduction $u\rho\theta \to_\beta^* \lambda x.\ u''$ et montrons $u''[x := v] \in |P_2|_\sigma$ pour tout $v \in |P_1|_\sigma$. Par hypothèse d'induction $u'\rho\theta[x := v] \in |P_2|_\sigma$, et l'on conclut par CR2 car $u'\rho\theta[x := v] \to_\beta^* u''[x := v]$.

2 Application

On souhaite maintenant appliquer le résultat précédent sur divers exemples de relation $\equiv$. Pour cela il suffit, pour une relation $\equiv$ donnée, de définir une structure adéquate. On obtient ainsi $\mathbf{SN}$ par les résultats précédents, et ainsi la cohérence de la logique obtenue, sous l'hypothèse (facile à vérifier) que la relation $\equiv$ considérée est sans confusion.

Question 11
Définir une structure adéquate pour $\equiv$ dans le cas de la première question.

Correction 11
Le plus naturel est de prendre $D = \mathbb{N}$ et les interprétations usuelles pour l'addition et le zéro. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on pose $\hat{=}(n, m) = \mathbf{SN} = |\top|_\sigma = |\bot|_\sigma$. La congruence sur les formules est engendrée par $(x = x) \equiv \top$ et $(0 = s(y)) \equiv \bot$. Il faut donc vérifier que $\hat{=}(n, n) = |\top|_\sigma$ et $\hat{=}(0, n{+}1) = |bot|_\sigma$, ce qui est évident. Cette vérification est suffisant puisque l'interprétation est "compositionnelle", c'est à dire qu'elle passe au contexte : si P et Q ont la même interprétation alors $C[P]$ et $C[Q]$ aussi.

On pouvait faire plus simple encore en prenant $D = \{\mathbf{1}\}$ et en interprétant tous les termes sur $\mathbf{1}$, et de nouveau l'égalité sur $\mathbf{SN}$.

On ignorera ci-dessous la restriction de la section précédente aux seuls connecteurs logiques $\Rightarrow$ et $\forall$: on supposera que l'interprétation a été définie pour toute formule [2], et on admettra que les propriétés vues précédemment restent vraies.

Question 12
Définir une structure adéquate pour $\equiv$ dans le cas de la deuxième question.

Correction 12
La difficulté est qu'on ne peut pas définir $\hat{N}(n)$ par induction sur n. Cela pose problème dès le rang 0 puisqu'on veut $|N(0)| = |0 = 0 \vee \exists y.\ 0 = s(y) \wedge N(y)|$ et cette seconde interprétation s'appuie sur *toutes* les valeurs possibles de $\hat{N}(v)$ pour $v \in D = \mathbb{N}$.

Il fallait construire directement $\hat{N}$ comme un point fixe de $\hat{N} \mapsto v \mapsto |x = 0 \vee \exists y.\ x = s(y) \wedge N(y)|_{x \mapsto v}$. (Dans l'interprétation qui définit cet opérateur, il faut comprendre que, quand on arrive à la sous-formule $N(y)$ on utilise le $\hat{N}$ passé en premier argument pour interpréter le prédicat.) Pour justifier cette construction, il fallait remarquer que l'opérateur est monotone, et que $\mathbf{CR}$ peut être équipé d'une structure de cpo.

Question 13
Sur le langage $\mathcal{F} = \{0(0),\ s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{E(1)\}$, on considère la congruence engendrée par les équations $E(0) \equiv \top$ et $E(s(x)) \equiv \neg E(x)$. Donner une structure adéquate pour $\equiv$.

---

2. On précise, si besoin, qu'on aura notamment $|P_1 \vee P_2|_\sigma = \{\ u \in \mathbf{SN} \ :\ u \to_\beta^* \iota_i u'$ entraîne $u' \in |P_i|_\sigma\ \}$ et $|\exists i.\ P|_\sigma = \{\ u \in \mathbf{SN}\ :\ $ si $u \to_\beta^* \iota t u'$ alors il existe $v \in D$ tel que $u' \in |P|_{\sigma + (x \mapsto v)}\ \}$.

Les choses sont-elles différentes si l'on considère, au lieu de ces deux équations, l'unique équation $E(i) \equiv i = 0 \vee \exists j.\, i = s(j) \wedge \neg E(j)$?

Correction 13

Sur le domaine $D = \mathbb{N}$ comme avant, on pose $\hat{E}(0) = |\top|_\sigma$ et $\hat{E}(n+1) = \hat{E}(n) \Rightarrow |\bot|_\sigma$ (c'est à dire $\{u \in \mathbf{SN} : u \rightarrow_\beta^* \lambda x.u' \Rightarrow \forall v \in \hat{E}(n).\ u'\ v \in |\bot|_\sigma\}$). On vérifie alors aisément les équations qui engendrent la congruence.

Il était incorrect de définir $\hat{E}(n) = |\top|_\sigma$ pour n pair et $|\bot|_\sigma$ pour n impair, car $|\top|_\sigma$ et $|\bot|_\sigma \Rightarrow |\bot|_\sigma$ n'ont aucune raison de coincider.

Si E est défini par une seule équation on a le même problème qu'avec N précédemment.