TD8 17 mars 2014

Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1
Le problème suivant est-il décidable ?
Donnée : un ensemble fini de formules E et une formule ϕ ;
Question : a-t-on $E \models \phi$ ou $E \models \neg\phi$?

Exercice 2
On considère la formule propositionnelle

$$\phi \stackrel{def}{=} \big((P \vee Q) \wedge (P' \vee Q)\big) \to \big(Q \vee (P \wedge P')\big)$$

1. Donner une dérivation de ϕ dans LK_0.
2. Donner une dérivation de ϕ dans NK_0.

Exercice 3
On compare deux modèles de Herbrand sur les mêmes signatures $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ en posant $\mathcal{M} \leq \mathcal{M}'$ ssi pour tout P, $\hat{P}_{\mathcal{M}} \subseteq \hat{P}_{\mathcal{M}'}$.

1. Donner une formule satisfaisable qui n'admette pas de plus petit modèle de Herbrand.
2. Soit S un ensemble fini de clauses qui possède un plus petit modèle de Herbrand $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est récursivement énumérable.

Exercice 4 (Arbre-forme résolue)
Un problème d'unification est en arbre-forme résolue s'il s'écrit $\bot$, $\top$ ou bien

$$x_1 \stackrel{?}{=} t_1 \wedge \ldots \wedge x_n \stackrel{?}{=} t_n$$

où les variables x_i n'apparaissent qu'une seule fois dans le problème. (On ne se préoccupe pas de l'orientation des équations : $t \stackrel{?}{=} x$ est autorisé au même titre que $x \stackrel{?}{=} t$.)

1. Donner un sous-ensemble minimal des règles de simplification du cours qui soit suffisant pour réduire tout problème en un problème en arbre-forme résolue.

Exercice 5 (DAG-forme résolue)
Un problème d'unification est en DAG-forme résolue s'il s'écrit $\bot$, $\top$ ou bien

$$x_1 \stackrel{?}{=} t_1 \wedge \ldots \wedge x_n \stackrel{?}{=} t_n$$

avec les variables x_i distinctes et pour tout $i \leq j$, $x_j \notin \mathrm{Var}(t_i)$.

1. Justifier qu'il s'agit bien d'une forme résolue, et montrer que le mgu d'une DAG-forme résolue peut être exponentiellement plus grand que le problème lui-même. (On prendra comme notions tailles le nombre de constantes et symboles de fonctions.)
2. Proposer une stratégie d'application des règles d'unification qui permette de réduire tout problème en DAG-forme résolue, et exploite l'intérêt de cette forme.

Exercice 6 (RT-forme résolue)
Un problème d'unification est en RT-forme résolue s'il s'écrit $\bot$, $\top$ ou bien

$$x_1 \stackrel{?}{=} t_1 \wedge \ldots \wedge x_n \stackrel{?}{=} t_n$$

où les x_i sont distinctes et où il n'y a pas de cycles de variables $x_{i_1} \stackrel{?}{=} x_{i_2} \wedge x_{i_2} \stackrel{?}{=} x_{i_3} \wedge \ldots \wedge x_{i_n} \stackrel{?}{=} x_{i_1}$.

1. Donner un sous-ensemble minimal des règles permettant de toujours atteindre ces formes résolues.
2. Montrer que ces règles sont correctes si on interprète les termes comme des arbres finis ou infinis.
3. Montrer que toute RT-forme résolue admet une solution pour ces arbres généralisés.
4. Montrer qu'on a défini un *mgu* pour les termes finis ou infinis. Le calculer pour $x \stackrel{?}{=} f(f(x)) \wedge f(x) \stackrel{?}{=} f(f(f(f(x))))$.