TD7 13 mars 2014

Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

On commencera par corriger l'exercice 4 du TD précédent. On laissera de côté l'exercice 5 qui ne semble pas pouvoir se traiter avec les techniques du cours.

Exercice 1 (Théorème de Löwenheim-Skolem ascendant)

1. Montrer que si E admet un modèle $\mathcal{M}$ de domaine A non vide elle admet aussi un modèle dont le domaine a un élément de plus, *i.e.*, $A \uplus \{\mathbf{1}\}$. Montrer que cela n'est plus vrai quand on se restreint à des modèles où le prédicat d'égalité est interprété comme l'égalité sur le domaine.
2. En déduire le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ dénombrables : si un théorie E admet un modèle de cardinalité $\alpha \geq \aleph_0$, alors pour tout $\beta \geq \alpha$ la théorie E admet un modèle de cardinalité (au moins) β.
3. Montrer qu'on a encore ce théorème pour des modèles dans lesquels le prédicat d'égalité est interprété comme l'égalité sur le domaine du modèle. Pour cela on considèrera l'extension de $\mathcal{F}$ et E par un grand nombre de nouvelles constantes et des axiomes spécifiant qu'elles soient distinctes.

Exercice 2 (Indécidabilité)

On a vu en cours que le problème de la satisfaisabilité d'une formule du premier ordre est indécidable.

1. Montrer que cela reste vrai si l'on se restreint au cas où $\mathcal{F} = \emptyset$.
2. Montrer que cela reste vrai si l'on force en plus que la formule soit de la forme $\exists x_0 \forall y \exists x_1 \exists x_2 \forall z.\ \phi'$ avec ϕ' sans quantificateur et dont tous les symboles de prédicats soient unaires.

Erratum

La question 2.2 est incorrecte. La remarque radicale (bravo à Félicien Comtat) est que les formules considérées font partie du fragment monadique qu'on a montré décidable dans le TD 5. Ci-dessous je reviens sur le problème de la preuve esquissée en fin de TD, puis je donne une preuve correcte d'un énoncé adapté (sans la contrainte monadique) qui repose sur les mêmes idées.

Voyons pourquoi la preuve que je proposais est incorrecte. Il s'agissait de réduire le problème du pavage en l'exprimant comme une formule du premier ordre utilisant dans un premier temps une constante o (désignant l'origine $(0,0)$) et deux fonction successeurs h et v (désignant l'incrément de l'abscisse et de l'ordonnée d'une position). Pour un ensemble de tuiles T, avec une tuile initiale $t_0 \in T$ et des relations de compatibilité horizontale et verticale H et V, on se donne un symbole de prédicat p_t par tuile $t \in T$ et on écrit :

$$\begin{array}{l} \forall x. p_{t_0}(o) \\ \wedge \bigvee_{(t,t')\in H} p_t(x) \wedge p_{t'}(h(x)) \\ \wedge \bigvee_{(t,t')\in V} p_t(x) \wedge p_{t'}(v(x)) \\ \wedge \bigvee_{t\in T} p_t(x) \\ \wedge \bigwedge_{t\neq t'\in T} \neg(p_t(x) \wedge p_{t'}(x)) \end{array}$$

Si on a un pavage du quart de plan, on peut aisément construire un modèle de notre formule. Le problème (bravo à Paul et François pour avoir insisté là dessus) est dans l'autre direction : si on a un modèle, il n'est pas évident d'en tirer un pavage. En effet, rien ne force notre modèle à satisfaire $\hat{v}(\hat{h}(p)) = \hat{h}(\hat{v}(p))$ pour tout p, et on ne peut pas s'en sortir en axiomatisant l'égalité car on n'a pas le droit aux prédicats binaires. On pourrait considérer, pour chaque t, la formule $\forall x. p_t(h(v(x))) \leftrightarrow p_t(v(h(x)))$ mais c'est plus faible : deux positions peuvent avoir la même couleur sans être égales. Trop faible, puisque la satisfaction des formules précédentes n'entraine notamment pas celle de $p_t(h^n(v(h(x)))) \leftrightarrow p_t(h^{n+1}(v(x)))$ pour un n arbitraire. Autrement dit, la relation "avoir la même couleur" sur les positions n'est pas une congruence pour h et v dans un pavage, ce qui est naturel. Forcer cela, en ajoutant la contrainte $\forall x \forall y.\ \big(p_t(x) \leftrightarrow p_t(y)\big) \rightarrow \big(p_t(h(x)) \leftrightarrow p_t(h(y))\big)$, serait beaucoup trop contraignant pour encoder nos pavages. Bref, on est coincés, et la façon la plus simple de le dire est que notre fragment est monadique donc décidable.

On donne maintenant une preuve correcte établissant que la satisfaisabilité est indécidable pour le fragment $\exists\forall\exists\forall$ et avec des prédicats binaires. Comme avant, on réduit le problème du pavage. Étant donné une instance (T, H, V, t_0), on considère la formule ϕ suivante sur la signature $\mathcal{F} = \{o(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{p_t(2) \mid t \in T\}$:

$$\begin{array}{l}\forall x \forall y. p_{t_0}(o, o) \\ \wedge \bigvee_{(t,t') \in H} p_t(x, y) \wedge p_{t'}(s(x), y) \\ \wedge \bigvee_{(t,t') \in V} p_t(y, x) \wedge p_{t'}(y, s(x)) \\ \wedge \bigvee_{t \in T} p_t(x) \\ \wedge \bigwedge_{t \neq t' \in T} \neg(p_t(x) \wedge p_{t'}(x))\end{array}$$

Comme on a pris soin de ne jamais appliquer le symbole s que sur la variable x, notre formule ϕ est la skolémisée de la formule ϕ' suivante :

$$\begin{array}{l}\exists x_o \forall x \exists x_s \forall y. p_{t_0}(x_o, x_o) \\ \wedge \bigvee_{(t,t') \in H} p_t(x, y) \wedge p_{t'}(x_s, y) \\ \wedge \bigvee_{(t,t') \in V} p_t(y, x) \wedge p_{t'}(y, x_s) \\ \wedge \bigvee_{t \in T} p_t(x) \\ \wedge \bigwedge_{t \neq t' \in T} \neg(p_t(x) \wedge p_{t'}(x))\end{array}$$

On a donc ϕ satisfaisable si et seulement si ϕ' satisfaisable, et ϕ' est dans le fragment souhaité. Pour montrer que la réduction est correcte il reste à établir que la satisfaisabilité de ϕ équivaut à l'existence d'un pavage du quart de plan pour l'instance du problème de pavage considérée. Comme avant, tout pavage donne un modèle de ϕ (sur le domaine $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) et cette fois on peut aussi obtenir un pavage à partir de tout modèle de ϕ : pour chaque position (n, m) on a un unique $\hat{p}_t$ vérifié sur $(\hat{s}^n(\hat{o}), \hat{s}^m(\hat{o}))$, ce qui nous donne une tuile pour cette position, et les contraintes de compatibilité se vérifient sans surprise.

Exercices non traités

Exercice 3
Le problème suivant est-il décidable ?
Donnée : un ensemble fini de formules E et une formule ϕ ;
Question : a-t-on $E \vDash \phi$ ou $E \vDash \neg\phi$?

Exercice 4 (Arbre-forme résolue)
Un problème d'unification est en arbre-forme résolue s'il s'écrit $\perp$, $\top$ ou bien

$$x_1 \stackrel{?}{=} t_1 \wedge \ldots \wedge x_n \stackrel{?}{=} t_n$$

où les variables x_i n'apparaissent qu'une seule fois dans le problème.

1. Quel est le mgu d'un problème sous cette forme ?
2. Donner un sous-ensemble minimal des règles de simplification du cours qui soit suffisant pour réduire tout problème en un problème en arbre-forme résolue.

Exercice 5 (DAG-forme résolue)
Un problème d'unification est en DAG-forme résolue s'il s'écrit $\perp$, $\top$ ou bien

$$x_1 \stackrel{?}{=} t_1 \wedge \ldots \wedge x_n \stackrel{?}{=} t_n$$

avec les x_i distinctes et pour tout $i \leq j$, $x_j \notin \mathrm{Var}(t_i)$.

1. Montrer que le mgu d'une DAG-forme résolue peut être exponentiellement plus grand que le problème lui-même. (On prendra comme notions tailles le nombre de constantes et symboles de fonctions.)
2. Donner un sous-ensemble minimal des règles de simplification du cours qui soit suffisant pour réduire tout problème en un problème en DAG-forme résolue.

Exercice 6 (RT-forme résolue)
Un problème d'unification est en RT-forme résolue s'il s'écrit $\perp$, $\top$ ou bien

$$x_1 \stackrel{?}{=} t_1 \wedge \ldots \wedge x_n \stackrel{?}{=} t_n$$

où les x_i sont distinctes et où il n'y a pas de cycles de variables.

1. Donner un sous-ensemble minimal des règles permettant de toujours atteindre ces formes résolues.
2. Montrer que ces règles sont correctes si on interprète les termes comme des arbres potentiellement infinis.
3. Montrer que toute RT-forme résolue admet une solution pour ces arbres généralisés.