TD6 6 mars 2014

Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1 (Examen 2011-2012)
On dit que deux structures sont *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes formules du premier ordre. On pose $\mathcal{P} = \{\geq\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, et on considère les $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ où $\geq$ est interprété de façon canonique.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.
2. On va montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont élémentairement équivalents. Si σ est une substitution à valeurs dans $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$) on note $\geq_\sigma$ la relation d'ordre définie par $x \geq_\sigma y$ ssi $x\sigma \geq_{\mathcal{S}} y\sigma$.
   (a) Montrer que, pour toute formule ϕ et toutes valuations θ et σ, de même domaine et à valeurs respectives dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$, et telles que $\geq_\sigma$ et $\geq_\theta$ coincident, on a $\mathbb{R}, \theta \vDash \phi$ ssi $\mathbb{Q}, \sigma \vDash \phi$.
   (b) Conclure.

Exercice 2 (Skolémisation)
Donner une suite de formules ϕ_n telle que, selon la stratégie de mise en forme prénexe, la somme des arités des symboles de fonction après Skolémisation puisse être soit linéaire ou exponentielle.

Exercice 3 (Herbrand)

1. Combien y a-t-il de structures de Herbrand pour
   (1) $\mathcal{F} = \{a(0), b(0)\}$, $\mathcal{P} = \{p(1)\}$,
   (2) $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$, $\mathcal{P} = \{=(2)\}$ et
   (3) $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$, $\mathcal{P} = \{p(0)\}$?
2. Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{p(1)\}$. Donner un modèle de Herbrand pour $\forall x.\ p(x) \leftrightarrow \neg p(s(x))$.
3. Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$. Skolémiser $\forall x \exists y.\ x = s(y)$. Donner un modèle de Herbrand de la formule résultante.

Exercice 4
Donner $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ et une formule satisfiable ϕ qui n'admette pas de modèle fini et pas de modèle de Herbrand.

Exercice 5
On suppose $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$. Donner deux structures de domaines dénombrables, élementairement équivalentes, non isomorphes et dans lesquelles $=$ est interprété comme l'égalité.

Exercice 6 (Théorème de Löwenheim-Skolem ascendant)

1. Montrer que si E admet un modèle $\mathcal{M}$ de domaine A non vide elle admet aussi un modèle dont le domaine a un élément de plus, *i.e.*, $A \uplus \{\mathbf{1}\}$. Montrer que cela n'est plus vrai quand on se restreint à des modèles où le prédicat d'égalité est interprété comme l'égalité sur le domaine.
2. En déduire le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ dénombrables : si un théorie E admet un modèle de cardinalité $\alpha \geq \aleph_0$, alors pour tout $\beta \geq \alpha$ la théorie E admet un modèle de cardinalité (au moins) β.
3. Montrer qu'on a encore ce théorème pour des modèles dans lesquels le prédicat d'égalité est interprété comme l'égalité sur le domaine du modèle. Pour cela on considèrera l'extension de $\mathcal{F}$ et E par un grand nombre de nouvelles constantes et des axiomes spécifiant qu'elles soient distinctes.