Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1
Trouver des dérivations NK_0 pour les formules suivantes :

1. $A \to B \to A$
2. $((A \to B) \to C) \to B \to C$
3. $(A \to B \to C) \equiv (A \wedge B \to C)$
4. $A \vee B \to B \vee A$
5. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. $((A \to B) \to A) \to A$

Exercice 2
Dire lesquelles de ces formules sont prouvables dans NJ_0, en justifiant :

1. $P \vee \neg P$
2. $\neg(P \wedge \neg P)$
3. $\neg\neg P \to P$
4. $\neg\neg\neg P \to \neg P$
5. $(P \to Q) \vee (Q \to P)$

Exercice 3
On va montrer que le tiers exclu n'est pas dérivable dans NJ_0, sans utiliser les structures de Kripke. On considère à la place l'interprétation suivante des formules de NJ_0 dans l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle. Étant donnée une interprétation $I(p)$ des variables propositionnelles en ouverts de $\mathbb{R}$, on l'étend par induction aux formules :

- $I(\bot) = \emptyset$ et $I(\top) = \mathbb{R}$;
- $I(\phi \wedge \psi) = I(\phi) \cap I(\psi)$ et $I(\phi \vee \psi) = I(\phi) \cup I(\psi)$;

- $I(\neg\phi)$ est l'intérieur de $\mathbb{R} \setminus I(\phi)$;
- $I(\phi \to \psi)$ est l'intérieur de $(\mathbb{R} \setminus I(\phi)) \cup I(\psi)$.

Un jugement $\Gamma \vdash P$ est dit valide si pour tout I on a $\cap_{Q\in\Gamma} I(Q) \subseteq I(P)$.

1. Montrer que le tiers exclu n'est pas valide.
2. Montrer que tout jugement prouvable dans NJ_0 est valide.

Exercice 4
On considère la règle

$$\frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P}\ (\text{restart})$$

que l'on ne peut appliquer que lorsque Q est la conclusion d'un jugement précédemment rencontré dans la preuve, c'est à dire qu'un jugement $\Delta \vdash Q$ est présent entre la conclusion finale de la preuve et le jugement $\Gamma \vdash P$ qui conclut l'application de la règle *restart*.

Montrer que NJ_0 + *restart* est correct et complet pour la logique classique.

Exercice 5
Le système LK_0 est obtenu en ajoutant la règle *cut* au système LK_0^-. On va donner une traduction effective entre les preuves de LK_0 et celles de NK_0, en s'interdisant donc d'utiliser les théorèmes de complétude. On annote le signe $\vdash$ avec le nom d'un système afin de préciser le jeu de règles à utiliser pour dériver le jugement.

1. Montrer que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}_0} P$ est dérivable, alors $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_0} P$ l'est aussi.
2. Montrer que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_0} \phi_1, \ldots, \phi_n$ est dérivable, alors on peut dériver $\Gamma, \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n \vdash_{\mathrm{NK}_0} \bot$.
3. En déduire que la dérivabilité de $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_0} \phi_1, \ldots, \phi_n$ entraîne celle de $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}_0} \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$.