TD3 6 février 2014

Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1 (stratégie input)
On considère une restriction de la règle de résolution, où l'une des prémisses au moins est dans E, l'ensemble de clauses initial. Cette stratégie est dite *input*.

1. Montrer que cette stratégie n'est pas réfutationnellement complète en général.
2. Montrer qu'elle est réfutationnellement complète lorsque E est un ensemble de *clauses de Horn*, c'est à dire que chaque clause contient au plus un littéral positif.

Exercice 2 (stratégie négative)
Une clause est dite négative si elle ne contient aucun littéral positif. On considère la restriction de la règle de résolution au cas où l'une des prémisses est négative. On note $\vdash_\neg$ la relation de déduction associée.

1. Soit E un ensemble de clauses ne contenant aucune clause négative. Montrer que E est satisfaisable.
2. Soit $E = \{\, \neg P \vee Q,\ P \vee Q,\ P \vee \neg Q,\ \neg P \vee \neg Q \,\}$. Montrer que $E \vdash_\neg \bot$.
3. Montrer que la stratégie négative est réfutationnellement complète.

Exercice 3
Trouver des dérivations NK_0 pour les formules suivantes :

1. $A \to B \to A$
2. $((A \to B) \to C) \to B \to C$
3. $(A \to B \to C) \equiv (A \wedge B \to C)$
4. $A \vee B \to B \vee A$

5. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. $((A \to B) \to A) \to A$

Exercice 4
Une règle $\mathcal{R}$ est dite admissible dans un système de règles d'inférences si l'on peut construire, à partir des règles du système, et de dérivations des prémisses de $\mathcal{R}$, une dérivation de la conclusion de $\mathcal{R}$.

Montrer que les règles suivantes sont admissibles dans NK_0 :

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee p \quad \Gamma \vdash \neg p \vee \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ (\text{résolution}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ (\bot E)$$

Remarque : la règle $(\bot E)$ revient à définir $\bot$ comme une disjonction 0-aire, et permet de retrouver les règles de la négation si l'on définit $\neg\phi := \phi \to \bot$.

Exercice 5
Montrer que la règle d'affaiblissement est éliminable, c'est à dire que NK_0 et $\mathrm{NK}_0 \setminus \{\mathrm{Aff}\}$ prouvent les mêmes séquents.

Exercice 6
Soient P, Q et F des formules, et p une variable propositionnelle. Si $P \vdash Q$ est dérivable, que peut-on dire de $F[P/p] \vdash F[Q/p]$?

Exercice 7
Le système LK_0 est obtenu en ajoutant la règle *cut* au système LK_0^-. On va donner une traduction effective entre les preuves de LK_0 et celles de NK_0, en s'interdisant donc d'utiliser les théorèmes de complétude. On annote le signe $\vdash$ avec le nom d'un système afin de préciser le jeu de règles à utiliser pour dériver le jugement.

1. Montrer que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}_0} P$ est dérivable, alors $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_0} P$ l'est aussi.
2. Montrer que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_0} \phi_1, \ldots, \phi_n$ est dérivable, alors on peut dériver $\Gamma, \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n \vdash_{\mathrm{NK}_0} \bot$.
3. En déduire que la dérivabilité de $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_0} \phi_1, \ldots, \phi_n$ entraîne celle de $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}_0} \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$.