TD2 30 janvier 2014

Logique

David Baelde <baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1 (indépendance, suite)
Un ensemble de formules E est *indépendant* si, pour toute formule $\phi \in E$, $E \setminus \{\phi\} \not\models \phi$. *Dans l'épisode précédent on a vu que tout ensemble fini de formules admet un sous-ensemble logiquement indépendant et équivalent, mais que c'était impossible pour un ensemble infini.* Montrer que, pour tout ensemble dénombrable E de formules, il existe un ensemble indépendant E' logiquement équivalent à E.

Exercice 2
On considère l'ensemble de formules suivant :

$$E = \{ \neg((P_1 \Rightarrow P_3) \Rightarrow P_2),\ P_1 \vee ((P_2 \vee P_3) \wedge \neg P_3) \}$$

Mettre ces formules en forme normale conjonctive pour obtenir un ensemble de clauses équivalent à E. Construire l'arbre sémantique associé à cet ensemble de clauses. Cet ensemble de clauses est-il satisfaisable ? À partir de l'arbre sémantique, construire un modèle ou une preuve d'incohérence par résolution.

Exercice 3 (stratégie ordonnée)
On se donne un ordre strict et total sur les variables propositionnelles, et on l'étend aux littéraux en ignorant les négations : on définit $L < L'$ ssi $v(L) < v(L')$ où $v(P) = P$ et $v(\neg P) = P$. On restreint alors l'application de la règle de résolution

$$\frac{C \vee P \quad \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$

au cas où P est maximal dans $P \vee C$ et $\neg P$ est maximal dans $\neg P \vee C'$. On restreint de même la factorisation

$$\frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}$$

au cas où L est maximal dans $L \vee L \vee C$. Montrer qu'avec ces deux règles la résolution ordonnée est réfutationnellement complète.

Exercice 4 (résolution avec sélection)
Utiliser la complétude réfutationnelle de la résolution avec sélection sur les clauses de Horn pour montrer que l'ensemble de clauses suivant est satisfaisable :

$$\{ A \vee \neg B \vee \neg C,\ B \vee \neg A,\ \neg A \vee \neg B,\ C \}$$

Exercice 5
Montrer que la complétude réfutationnelle est perdue si on oublie la règle de factorisation, mais qu'on la retrouve si on transforme la règle de résolution comme suit :

$$\frac{C \vee P \vee \ldots \vee P \quad \neg P \vee \ldots \vee \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$

Cette règle revient à traiter les clauses comme des ensemble de littéraux.

Exercice 6 (stratégie input)
On considère une restriction de la règle de résolution, où l'une des prémisses au moins est dans E, l'ensemble de clauses initial. Cette stratégie est dite *input*.

1. Montrer que cette stratégie n'est pas réfutationnellement complète en général.
2. Montrer qu'elle est réfutationnellement complète lorsque E est un ensemble de *clauses de Horn*, c'est à dire que chaque clause contient au plus un littéral positif.

Exercice 7 (stratégie négative)
Une clause est dite négative si elle ne contient aucun littéral positif. On considère la restriction de la règle de résolution au cas où l'une des prémisses est négative. On note $\vdash_\neg$ la relation de déduction associée.

1. Soit E un ensemble de clauses ne contenant aucune clause négative. Montrer que E est satisfaisable.
2. Soit $E = \{ \neg P \vee Q,\ P \vee Q,\ P \vee \neg Q,\ \neg P \vee \neg Q \}$. Montrer que $E \vdash_\neg \bot$.
3. Montrer que la stratégie négative est réfutationnellement complète.