TD11 28 avril 2014

Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1
Parmi les énoncés suivants, prouver ceux qui sont vrais et expliquer pourquoi les autres ne le sont pas forcément. On rappelle qu'une théorie est un ensemble de formules clos par déduction : $T \models \phi$ implique $\phi \in T$.

1. Une théorie T est cohérente ssi $T \not\models \bot$.
2. Soit A un ensemble de formules closes. Si A est récursif alors la théorie engendrée $\{\phi : A \models \phi\}$ est récursive.
3. Une théorie récursive est complète.
4. Soit $\mathcal{S}$ une structure. Si sa théorie engendrée $\{\phi : \mathcal{S} \models \phi\}$ est récursivement énumérable alors elle est récursive.
5. Soit T une théorie complète. Si $M \models T$ et $M' \models T$ alors M et M' sont élémentairement équivalents.
6. Si T est cohérente et $T \not\models \phi$ alors $T \cup \{\neg\phi\}$ est cohérente.

Exercice 2
Soit Φ l'ensemble des formules closes du premier ordre sur les prédicats $\{=\}$ et la signature $\{0, s, +, \times\}$. Si Π est une preuve de $Q \vdash \phi$, on note $\langle\Pi(\phi)\rangle$ son code dans $\mathbb{N}$. On note $\mathbb{N}$ le modèle standard de Q. Finalement, on pose $D = \{\ (\langle\phi\rangle, \langle\Pi(\phi)\rangle)\ \}$ et $\phi_D(x, y)$ une formule qui représente D dans Q.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies pour tous les énoncés $\phi \in \Phi$? Justifier.

1. $\mathbb{N} \models \phi \to \exists x.\ \phi_D(\overline{\langle\phi\rangle}, x)$
2. $Q \vdash \phi \to \exists x.\ \phi_D(\overline{\langle\phi\rangle}, x)$
3. $\mathbb{N} \models (\exists x.\ \phi_D(\overline{\langle\phi\rangle}, x)) \to \phi$
4. $Q \vdash (\exists x.\ \phi_D(\overline{\langle\phi\rangle}, x)) \to \phi$

Exercice 3

1. Montrer que le problème suivant est indécidable :
   Donnée: une fonction récursive primitive f;
   Question: est-ce que $f(x) = 0$ pour tout x ?
2. On note $\langle f \rangle$ le code d'une fonction récursive (partielle) f. Montrer que la totalité d'une fonction récursive ne peut être définissable dans une théorie cohérente, c'est à dire qu'on ne peut avoir de formule ϕ_t à un paramètre tel que $T \vdash \phi_t(\langle f \rangle)$ ssi f est totale.