TD1 23 janvier 2014

Logique

David Baelde <baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1
Soit $\mathcal{Q}$ une partie finie de l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P}$. Donner l'index de la relation d'équivalence logique sur l'ensemble des formules à variables dans $\mathcal{Q}$.

Exercice 2
On considère $\mathcal{P}$ infini dénombrable. Donner un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini mais dénombrable.

Exercice 3 (merci à Edwin Hamel, 2012/2013)
On pose $M(E) = \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \vDash E\}$. Soit E et E' deux ensembles dénombrables de formules. Définir F tel que $M(F) = M(E) \cap M(E')$. Définir G tel que $M(F) = M(E) \cup M(E')$.

Exercice 4 (théorème d'interpolation)
Soient ϕ et ψ telles que $\phi \vDash \psi$.

1. Montrer qu'il existe une formule θ telle que $\phi \vDash \theta$ et $\theta \vDash \psi$ et les variables propositionnelles apparaissant dans θ apparaissent aussi dans ϕ et ψ.
2. En supposant que q n'apparait pas dans ϕ, calculer un interpolant pour $p \wedge q \vDash \phi$ et $\phi \vDash p \wedge q$ en appliquant la méthode proposée en point 1.

Exercice 5
Montrer qu'un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Exercice 6
Un ensemble de formules E est *indépendant* si, pour toute formule $\phi \in E$, $E \setminus \{\phi\} \not\models \phi$.

1. Montrer que, pour tout ensemble fini de formules E, il existe un sous-ensemble indépendant $E' \subseteq E$ tel que, pour tout $\phi \in E$, $E' \models \phi$.
2. Donner un ensemble infini de formules E qui n'admette aucun sous-ensemble E' qui soit indépendant et logiquement équivalent à E, *i.e.*, pour tout $\phi \in E'$, $E \models \phi$ et pour tout $\psi \in E$, $E' \models \psi$.
3. Montrer que, pour tout ensemble dénombrable E de formules, il existe un ensemble indépendant E' logiquement équivalent à E.

Exercice 7
Donner une formule telle que, quand on la met en forme clausale avec les règles de réécriture du cours, on peut obtenir deux formes clausales différentes modulo associativités et commutativités.

Exercice 8
La mise en forme clausale d'une formule peut accroitre exponentiellement sa taille. Nous allons montrer que c'est inévitable et encadrer cette explosion. Pour cela on considère la famille de formules suivantes :

$$\phi_n = (P_1 \wedge Q_1) \vee \ldots \vee (P_n \wedge Q_n)$$

On note $|\phi|$ la taille d'une formule (nombre de connecteurs logiques) et $\tau(\phi)$ la taille minimale d'une forme clausale pour ϕ.

1. Déterminer une forme clausale de taille minimale pour ϕ_n.
2. Montrer
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\tau(\phi_n)}{2^{|\phi_n|/2}} > 0$$
3. Montrer que $\tau(\phi) < |\phi| \times 2^{\frac{|\phi|+3}{2}}$ pour tout ϕ. Indice : on considèrera la mesure $w(\phi)$ définie comme valant 0 pour une variable, $w(\neg P) = w(P)$ et $w(\phi * \phi') = 1 + w(\phi) + w(\phi')$ pour tout $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, et on montrera que toute formule ϕ admet une forme clausale ψ telle que $w(\psi) \leq w(\phi) \times 2^{(1+w(\phi))/2}$.