TD4 11 mars 2014

λ-Calcul et Logique Informatique

David Baelde
baelde@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 — Réduction et typage
On rappelle la règle de η-réduction :

$$\lambda x.\ M\ x \to_\eta M \quad \text{si} \quad x \notin \mathrm{FV}(M)$$

1. Montrer que la β-réduction préserve le typage : $u \to_\beta v$ et $\Gamma \vdash u : T$ implique $\Gamma \vdash v : T$.
2. Montrer que la η-réduction préserve le typage.
3. Montrer que la η-expansion ne préserve pas le typage : $u \to_\eta v$ et $\Gamma \vdash v : T$ n'implique pas forcément $\Gamma \vdash u : T$. Quelle condition permettrait d'obtenir cette propriété ?
4. De même pour la β-expansion. Quelle propriété importante du typage perd-on forcément dans un système de types pour lequel le typage est préservé par β-expansion ?

Exercice 2 — Paires
On considère le λ-calcul étendu avec paires et projections :

$$M ::= x \mid \lambda x.\ M \mid M\ N \mid \langle M, N\rangle \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M$$

La réduction est la plus petite congruence contenant β et les nouvelles règles suivantes :

$$\pi_1\langle M_1, M_2\rangle \ \to\ M_1 \qquad\qquad \pi_2\langle M_1, M_2\rangle \ \to\ M_2$$

1. Proposer un système de types pour ce calcul, tel que la réduction préserve le typage.
2. Dans la correspondance de Curry-Howard, comment s'interprète (logiquement) le type de la paire ?

Exercice 3 — Disjonction
On considère maintenant l'extension suivante du langage de termes :

$$M ::= \dots \mid \iota_1 M \mid \iota_2 M \mid \delta(M, x.N_1, x.N_2)$$

Dans la dernière construction, la notation $x.N$ dénote une liaison de la variable x dans le terme N. Comme avec tout lieur on considèrera ces termes modulo α-renommage. On se donne aussi les nouvelles règles de typage suivantes, avec $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$:

$$\frac{\Gamma \vdash M : A_1}{\Gamma \vdash \iota_1 M : A_1 \vee A_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A_2}{\Gamma \vdash \iota_2 M : A_1 \vee A_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A_1 \vee A_2 \quad \Gamma, x : A_1 \vdash N_1 : C \quad \Gamma, x : A_2 \vdash N_2 : C}{\Gamma \vdash \delta(M, x.N_1, x.N_2) : C}$$

Enfin, on ajoute les réductions suivantes :

$$\delta(\iota_1 M, x.N_1, x.N_2) \to N_1[M/x] \qquad \delta(\iota_2 M, x.N_1, x.N_2) \to N_2[M/x]$$

1. Vérifier que la réduction préserve encore le typage.
2. Dans la correspondance de Curry-Howard, quel sens (calculatoire) peut-on donner aux nouvelles constructions ι_i et δ ?
3. Bonus : proposer une extension de ce calcul avec un type $\bot$, qui corresponde (logiquement) à l'absurdité, dont on doit pouvoir déduire n'importe quoi. On pourra s'inspirer du fait que $\bot$ peut être vu comme une disjonction d'arité 0.

Exercice 4 — Sémantique de Kripke

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de variables propositionnelles, dont les éléments seront notés p, q. On considère le fragment purement implicationnel de la logique intuitionniste donné par :

$$F ::= p \mid F_1 \Rightarrow F_2$$

On dit qu'une formule F est *prouvable* s'il existe un terme u tel que $\cdot \vdash u : F$.

On peut donner une sémantique de vérité à cette logique via la notion de *structure de Kripke*, donnée par :

- un ensemble M de mondes ;
- un ordre $\leq$ sur ces mondes ;
- une fonction croissante ϕ de $(M, \leq)$ dans $(\mathcal{P}(\mathcal{V}), \subseteq)$.

Pour un monde w et une formule F, on définit la relation w *satisfait* F, notée $w \Vdash F$ par :

- pour tout $p \in \mathcal{V}$, $w \Vdash p$ ssi $p \in \phi(w)$;
- pour tout F_1 et F_2, $w \Vdash F_1 \Rightarrow F_2$ ssi $w' \Vdash F_1$ implique $w' \Vdash F_2$ pour tout $w' \geq w$.

Enfin, on dit qu'une formule F est *valide* si pour toute structure $(M, \leq, \phi)$ et tout monde $w \in M$ on a $w \Vdash F$.

1. Justifier que la définition de $\Vdash$ est bien formée.
2. On fixe une variable propositionnelle $f \in \mathcal{V}$, et on définit $\neg P$ comme $P \Rightarrow f$. Montrer que, pour tout $a \in \mathcal{V}$, $a \Rightarrow \neg\neg a$ est valide mais $\neg\neg a \Rightarrow a$ ne l'est pas.
3. Démontrer la correction de la sémantique de Kripke : toute formule prouvable est valide.

On souhaite maintenant établir la complétude de la sémantique de Kripke pour la logique intuitionniste, c'est à dire que toute formule valide est prouvable. On appelle *théorie* un ensemble de formules clos par déduction, et on considère la structure de Kripke *universelle* $\mathcal{U}$ dont les mondes sont les théories, ordonnées par inclusion, avec $\phi(w) = w \cap \mathcal{V}$.

4. Soit T une théorie telle que $(A \Rightarrow B) \notin T$. Montrer qu'il existe une théorie $T' \supseteq T$ contenant A mais pas B. Indice : on pourra considérer une énumération des formules, et en rajouter autant que possible à T.
5. Montrer que $T \Vdash A$ ssi $T \vdash A$. Conclure.
6. Bonus : raffiner la construction pour obtenir la décidabilité de la validité intuitionniste. Pour cela, étant donnée une formule A, on construira un modèle universel $\mathcal{U}_A$ fini.