

$\lambda$ -calcul et logique informatique

baelde@lsv.ens-cachan.fr

**Exercice 1**

Parmi les termes suivants, indiquer lesquels sont  $\alpha$ -équivalents et lesquels sont  $\beta$ -équivalents :

1.  $(\lambda x. \lambda y. x) x$
2.  $\lambda x. x$
3.  $(\lambda x. \lambda x. x) x$
4.  $(\lambda x. \lambda y. y) x$
5.  $(\lambda x. \lambda y. y) (\lambda x. x)$

**Exercice 2**

Dans la suite, l'égalité dénote la  $\beta$ -équivalence.

1. Caractériser les termes clos  $M$  et  $N$  qui rendent l'équivalence vraie :

$$(\lambda x. \lambda y. M x) = (\lambda x. \lambda y. N y)$$

2. Donner une infinité de termes clos  $M$  tels que :

$$(\lambda z. \lambda s. s (M s z)) = (\lambda z. \lambda s. M s (s z))$$

**Exercice 3 (Booléens)**

On code les booléens comme des projections dans le  $\lambda$ -calcul :

$$\begin{aligned} [\top] &= \lambda x. \lambda y. x \\ [\perp] &= \lambda x. \lambda y. y \end{aligned}$$

Donner les encodages de la conjonction, la disjonction et la négation. Formellement, on cherche par exemple un terme  $A$  tel que  $A [b] [b'] = [b \wedge b']$  pour tous booléens  $b$  et  $b'$ .

**Exercice 4 (Réduction parallèle)**

Dans cet exercice, la flèche simple  $\rightarrow$  dénote la  $\beta$ -réduction. On définit la réduction parallèle comme suit :

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'} \text{ app} \qquad \frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x.u \Rightarrow \lambda x.u'} \text{ abs}$$

$$\frac{}{u \Rightarrow u} \text{ refl} \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x.u)v \Rightarrow u'[x := v']} \text{ beta}$$




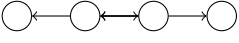
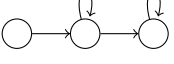
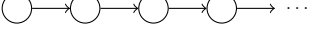

1. Montrer les inclusions suivantes en donnant des exemples illustrant qu'elles sont strictes :

$$\rightarrow \subseteq \Rightarrow \subseteq \rightarrow^*$$

2. Montrer que  $\Rightarrow$  est fortement confluente.
3. En déduire que  $\rightarrow$  est confluente.

**Exercice 5 (Graphes de réduction)**

Pour chacun des graphes suivants, trouver un λ-terme qui a pour graphe de réduction ce graphe.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 