Devoir de λ-calcul 2014 — Corrigé

Isomorphismes de types

David Baelde

13 mai 2014

1 Isomorphismes de types dans $\Lambda^{\Rightarrow}$

Question 1
Montrer que $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow D \Rightarrow E$ et $D \Rightarrow (B \Rightarrow A \Rightarrow C) \Rightarrow E$ sont isomorphes.

Correction 1
On considère $M = \lambda f \lambda x \lambda y.\ f\ y\ (\lambda a \lambda b.\ x\ b\ a)$, et $N = \lambda g \lambda y \lambda x.\ g(\lambda b \lambda a.\ x\ a\ b)\ y$. On vérifie aisément que M admet le type $T \Rightarrow T'$, et N le type $T' \Rightarrow T$. On vérifie enfin que les composées donnent l'identité ; pour cela la règle η est nécessaire.
On pouvait aussi décomposer ce résultat en montrant que pour tout T_1, T_2, T_3 les types $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3$ et $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_3$ sont isomorphes, puis en montrant que l'isomorphisme passe au contexte, ce qui était admis sans le dire dans l'énoncé.

Question 2
Montrer que si un terme M est inversible, alors sa variable de tête est son premier argument et aucune de ses abstractions de tête n'est vide, c'est à dire qu'on a $M =_{\beta\eta} \lambda x \lambda y_1 \dots \lambda y_k.\ x\ M_1 \dots M_n$ avec pour tout $1 \leq i \leq k$, y_i apparaissant dans au moins un M_j.

Correction 2
Si M est inversible, alors il existe un N tel que $\lambda x.\ x =_{\beta\eta} \lambda x.\ M\ (N\ x)$. On peut supposer M en forme β-normale η-longue, s'écrivant en toute généralité $\lambda y_0 \dots \lambda y_k.\ v\ M_1 \dots M_n$ où $v = y_i$ pour $0 \leq i \leq k$ car M est supposé clos. Notre équation est donc équivalente à :

$$\lambda x.\ x =_{\beta\eta} \lambda x.\ \lambda y_1 \dots \lambda y_k.\ (y_i\ M_1 \dots M_n)[y_0 := N\ x]$$

Si $i > 0$ alors la variable de tête du terme de droite resterait y_i, or les termes de part et d'autre de l'égalité doivent avoir la même variable de tête, c'est à dire x. Donc $i = 0$. On observe de plus que si un des y_i $(0 < i \leq k)$ n'apparait dans aucun M_j, alors cela restera le cas par β-reduction et η_0-expansion, donc y_i n'apparaitra pas dans la forme β-normale η-longue de notre terme. Or celle ci doit coincider avec la forme β-normale η-longue de l'identité $\lambda x.\ x$, qui ne contient pas d'abstraction vide — elle s'écrit $\lambda x.\ \lambda y_1 \dots y_k.\ x\ Y_1 \dots Y_k$ avec Y_i forme β-normale η-longue de y_i, ayant notamment pour variable de tête y_i lui même.
On a utilisé ici l'unicité de la forme β-normale η-longue, et plus faiblement l'unicité de la variable de tête. Plusieurs personnes n'ont pas exploité directement ces résultats connus ou admis, et perdu du temps à (parfois mal) redémontrer des choses équivalentes.

Question 3
On considère deux formes β-normales η-longues inverses l'une de l'autre :

$$M = \lambda x \lambda y_1 \ldots \lambda y_n.\ x\ M_1 \ldots M_p \qquad N = \lambda x' \lambda y'_1 \ldots \lambda y'_m.\ x'\ N_1 \ldots N_q$$

On notera $\delta(M) = n - p$; de même $\delta(N) = m - q$. Si $M : T \Rightarrow T'$, exprimer $\delta(M)$ en fonction de $\mathrm{ar}(T)$ et $\mathrm{ar}(T')$. En déduire une relation entre $\delta(M)$ et $\delta(N)$.

Correction 3
En considérant la dérivation de type, et en exploitant le fait qu'on a une forme β-normale η-longue, on voit que $\mathrm{ar}(T) = p = m$ et $\mathrm{ar}(T') = n = q$. Donc $\delta(M) = \mathrm{ar}(T') - \mathrm{ar}(T)$, et $\delta(N) + \delta(M) = 0$.

Question 4
Soit M et N formes β-normales η-longues inverses l'une de l'autre, s'écrivant

$$M = \lambda x \lambda y_1 \ldots \lambda y_n.\ x\ M_1 \ldots M_p \qquad \text{et} \qquad N = \lambda x' \lambda y'_1 \ldots \lambda y'_p.\ x'\ N_1 \ldots N_n$$

Montrer qu'il existe une bijection σ telle que, pour tout $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$, M_i a pour variable de tête $y_{\sigma(i)}$ et N_j a pour variable de tête $y'_{\sigma^{-1}(j)}$. De plus, on concluera bien sûr qu'on a $p = n$.

Correction 4
On exprime les conditions d'inversibilité. Si on pose $\theta := [y_j := N_j[x' := M\ x]]_{1 \leq j \leq n}$ et $\theta' := [y'_j := M_j[x := N\ x']]_{1 \leq j \leq p}$, on a :

$$\lambda x'.\ x' =_{\beta\eta} \lambda x'.\ M\ (N\ x') =_{\beta\eta} \lambda x'.\ \lambda y_1 \ldots \lambda y_n.\ x'\ N_1\theta' \ldots N_n\theta'$$

$$\lambda x.\ x =_{\beta\eta} \lambda x.\ N\ (M\ x) =_{\beta\eta} \lambda x.\ \lambda y'_1 \ldots \lambda y'_p.\ x\ M_1\theta \ldots M_p\theta$$

On observe tout d'abord que **chaque M_i a pour variable de tête une certaine variable $y_{\sigma(i)}$, et chaque N_i a pour variable de tête $y'_{\sigma'(i)}$** . En effet, les convertibilités imposent l'égalité des formes β-normales η-longues. La forme normale longue de la première identité (sur le type T') est (modulo α-renommage) $\lambda x' \lambda y_1 \ldots \lambda y_n.\ x'\ Y_1 \ldots Y_n$ où chaque Y_i est la forme β-normale η-longue de y_i. Comme Y_i a pour variable de tête y_i, $N_i\theta'$ doit avoir la même variable de tête. Le terme N étant clos, son sous-terme N_i peut avoir pour variable de tête un y'_j, x' ou une variable liée introduite dans N_i. Si c'est x', alors $N_i\theta'$ aura toujours pour variable de tête x', ce qui contredit la convertibilité avec l'identité. De même, si c'est une variable liée, cela le restera après substitution, ce qui est absurde. Ainsi N_i a pour variable de tête un y'_j. On pose $\sigma'(i) = j$. On définit de même σ.
On montre ensuite que **σ, σ' sont inverses l'une de l'autre**. En poursuivant le raisonnement précédent, la variable de tête de $N_i\theta'$ sera la variable de tête de $M_{\sigma'(i)}$, c'est à dire $y_{\sigma(\sigma'(i))}$. Mais on a vu que cela doit être y_i. On conclut que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\sigma(\sigma'(i)) = i$. Le raisonnement symétrique donne l'autre direction. On a une bijection entre $[1; n]$ et $[1; p]$, ce qui impose $p = q$.

Question 5
Soient M, N, θ, θ' et σ comme dans la question précédente, avec $p = n$. En utilisant le même argument qu'en question 2, on observe aisément que les sous-termes M_i et N_j ne peuvent comporter aucune abstraction vide en tête. On admettra en fait plus généralement que ces termes ne peuvent contenir d'abstraction vide, y compris en profondeur. Montrer que $(\lambda y_{\sigma(i)}.\ M_i)$ et $(\lambda y'_i.\ N_{\sigma(i)})$ sont clos, puis qu'ils sont inverses l'un de l'autre.

Correction 5
La difficulté est de montrer que les termes sont clos. Vu de loin cette question semble triviale, ou découlant d'arguments similaires à ceux utilisés plus haut. Mais c'est vraiment délicat de montrer proprement le résultat sans l'hypothèse admise. En gros, ceux qui ont réussi cette question sont ceux qui ont (bien) utilisé l'hypothèse.

On a vu dans la question précédente que $M_i\theta =_{\beta\eta} y'_i$. Ainsi M_i ne peut comporter d'abstraction vide en tête, par le même argument que dans la question 2. En profondeur, on sait seulement que $M_i\theta$ n'en comporte pas. Si on en avait une dans M_i il faudrait qu'elle soit sous une occurrence d'un y_j tel que N_j puisse effacer cette abstraction gênante. Mais il y a là plusieurs possibilités à considérer, et cela ne veut pas forcément dire que N_j contienne une abstraction vide. D'où l'hypothèse admise.

(a) On observe que le fait de ne pas avoir d'abstraction vide est stable par β-réduction. Il suffit de le montrer pour un pas de réduction. On peut le faire par induction sur le terme, en renforçant l'invariant pour prouver aussi que la réduction laisse l'ensemble des variables libres invariant.

Les variables libres de M_i peuvent *a priori* être x ou des y_j. Si x apparaît dans M_i alors x apparait dans $M_i\theta =_{\beta\eta} y'_i$ car cette variable n'est pas dans le domaine de θ, ce qui est absurde. Si y_j apparait dans M_i, alors $M_i\theta$ contient N_j et donc $y'_{\sigma'(j)}$. Cette variable ne peut être effacée donc elle doit être y'_i lui même, ce qui impose $j = \sigma(i)$. Ainsi M_i ne peut avoir pour variable libre que $y_{\sigma(i)}$.

(b) La question précédente permet de réécrire nos convertibilités :

$$\lambda y'_i.\ y'_i =_{\beta\eta} \lambda y'_i.\ (\lambda y_{\sigma(i)}.\ M_i)\ ((\lambda y'_i.\ N_{\sigma(i)})\ y'_i)$$

$$\lambda y_{\sigma(i)}.\ y_{\sigma(i)} =_{\beta\eta} \lambda y_{\sigma(i)}.\ (\lambda y'_i.\ N_{\sigma(i)})\ ((\lambda y_{\sigma(i)}.\ M_i)\ y_{\sigma(i)})$$

Pour la seconde équation, on a pris $j = \sigma(i)$ et on a utilisé le fait que σ' est l'inverse de σ. Ces équations signifient que $(\lambda y'_j.\ N_i)$ et $(\lambda y_i.\ M_j)$ sont inverses l'un de l'autre.

Question 6

Déduire des questions précédentes une caractérisation des termes inversibles en forme β-normale. Dans la littérature, on appelle ces termes *permutations héréditaires.*

Correction 6

J'ai noté gentiment, mais cette question a été plutôt mal traitée. D'abord il valait mieux définir les permutations héréditaires puis montrer qu'elles sont exactement les (formes normales) des inversibles. Surtout, quasiment personne n'a fait l'effort de vérifier les conditions d'application des questions précédentes, pour tout relier en un argument complet. Et trop de gens n'ont pas explicité la structure de leur argument, qui était en l'occurrence une induction sur le terme inversible.

On définit les permutations héréditaires inductivement : si chaque M_i ($1 \leq i \leq n$) est une permutation héréditaire, et que σ est une permutation de $[1;n]$ alors $\lambda x \lambda y_1 \ldots \lambda y_n.\ x\ (M_1\ y_{\sigma(1)}) \ldots (M_n\ y_{\sigma(n)})$ est une permutation héréditaire. Plus précisemment on prendra les formes normales de ces termes, ce qui revient à substituer x (la première abstraction) par $y_{\sigma(i)}$ dans chaque M_i. On note que l'identité est une permutation héréditaire, et que le fait d'être une permutation héréditaire est stable par η-expansion. Si $M \to_{\eta_0} M'$, alors M est une permutation héréditaire ssi M' en est une. On peut donc restreindre la question aux inversibles en forme β-normale η-longue.

Soit M et N en formes β-normales η-longues, inverses l'un de l'autre. On montre, par induction sur la taille de M, que ces deux termes sont des permutations héréditaires. On a vu que les variables de tête de ces termes sont leur premier argument. On a nécessairement $M : T \Rightarrow T'$ et $N : T' \Rightarrow T$ pour des types T et T'. Par la question 3, on a (en tête) le même nombre d'applications dans M que d'abstractions dans N, et vice versa. Cela permet d'appliquer la question 4, qui nous donne une permutation sur $[1;n]$ ainsi que le fait que les nombres d'applications et d'abstractions coincident. On obtient enfin par la question 5 que les sous-termes associés par la bijection, i.e., $(\lambda y_{\sigma(i)}.\ M_i)$ et $(\lambda y'_i.\ N_{\sigma(i)})$ sont inverses l'un de l'autre. Par hypothèse d'induction, les $(\lambda y_{\sigma(i)}.\ M_i)$ sont des permutations héréditaires, et M en est donc aussi une.

Question 7

En déduire une axiomatisation finie, correcte et complète des isomorphismes de types pour $\Lambda^{\Rightarrow}$. Autrement dit, on cherche à faire coïncider $\simeq$ avec $\simeq_{\Rightarrow}$, définie comme la plus petite relation d'équivalence qui passe au contexte et satisfasse certaines équations, en nombre fini.

Correction 7
Ici, beaucoup de gens ne voyaient pas la forme de ce que je demandais. C'est dommage... il ne fallait pas hésiter à me contacter.
Il suffit de prendre l'équation $A \Rightarrow B \Rightarrow C \simeq_{\Rightarrow} B \Rightarrow A \Rightarrow C$. Clairement, $\simeq_{\Rightarrow} \subseteq \simeq$: comme l'isomorphisme passe au contexte, il suffit de vérifier l'équation, et pour cela on prend $\lambda f \lambda x \lambda y.\ f\ y\ x$, qui est son propre inverse. On montre maintenant la réciproque.
Supposons $T \simeq T'$, avec M et N réalisant cet isomorphisme. On suppose, sans perte de généralité, que M est en forme β-normale η-longue. On a $M : T \Rightarrow T'$, et par la question précédente M est une permutation héréditaire. On montre par induction sur M que $T \simeq_{\Rightarrow} T'$. Il y a deux cas :
- Si $M = \lambda x.\ x$ alors $T = T'$, et trivialement $T \simeq_{\Rightarrow} T'$.
- Sinon $M = \lambda x \lambda y_1 \dots \lambda y_n.\ x\ (M_1\ x_{\sigma(1)}) \dots (M_n\ x_{\sigma(n)})$. Le typage impose $T' = T'_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow T'_n \Rightarrow T''$ et $T = T_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow T_n \Rightarrow T''$, et M_i de type $T'_i \Rightarrow T_i$. Par ailleurs les sous-termes sont des permutations héréditaires. Si σ est la permutation associée, on obtient par hypothèse d'induction $T_i \simeq_{\Rightarrow} T'_{\sigma(i)}$ pour tout i. Ainsi $T \simeq_{\Rightarrow} T'_{\sigma(1)} \Rightarrow \dots \Rightarrow T'_{\sigma(n)} \Rightarrow T''$. Il reste à réordonner les T'_j, et cela découle de notre équation par passage au contexte et décomposition de σ en transpositions élémentaires.

2 Extension à $\Lambda^{\Rightarrow \times \mathbf{1}}$

Question 8
Montrer que $T \rightsquigarrow T'$ implique $T \simeq T'$.

Correction 8
Comme l'isomorphisme passe au contexte il suffit de vérifier pour chaque instance d'une règle $T \rightsquigarrow T'$ que $T \simeq T'$. Je ne corrige que le premier cas : on veut montrer pour tout A que $A \times \mathbf{1} \simeq A$. On prend $M = \lambda p.\ \pi_1(p)$ et $N = \lambda a.\ \langle a, \langle\rangle\rangle$. Ces termes ont le bon type. On a $\lambda x.\ M\ (N\ x) \rightarrow^*_\beta \lambda x.\ x$. On a aussi $\lambda x.\ N\ (M\ x) \rightarrow^*_\beta \lambda x.\ \langle \pi_1(x), \langle\rangle\rangle$. On observe alors que l'identité sur $A \times \mathbf{1}$ peut être η-expansée en $\lambda x.\ \langle \pi_1(x), \pi_2(x)\rangle$ puis $\lambda x.\ \langle \pi_1(x), \langle\rangle\rangle$ car le second terme était de type $\mathbf{1}$. On a donc la convertibilité avec l'identité.

Question 9
Montrer que $\rightsquigarrow$ termine et conflue. Pour le second point, on pourra ne pas énumérer tous les cas, mais l'on veillera à bien expliquer ce qu'il faudrait énumérer.

Correction 9
Considérons une séquence de réductions et montrons qu'elle est finie.
- On montre tout d'abord qu'elle ne peut contenir une infinité d'occurrences des règles (4,5). Pour cela on considère la mesure définie par $\rho(\mathbf{1}) = \rho(A) = 1$ si A est atomique, $\rho(T \times T') = \rho(T) + \rho(T') + 1$ et $\rho(T \Rightarrow T') = 2^{\rho(T)} \rho(T')$. On a clairement $\rho(T) \geq 1$ pour tout T. De plus, toute application d'une règle (dans un contexte quelconque) fait décroitre la mesure au sens large. Enfin, la mesure décroit strictement pour les règles qui nous intéressent, essentiellement car $2^{a+b+1}c > 2^a 2^b c$ dès lors que $c \geq 1$, et $2^a(b + c + 1) > 2^a b + 2^a c + 1$ dès lors que $2^a > 1$. Ainsi il ne peut y avoir une infinité d'applications de (4,5).
- On se place alors après la dernière occurrence de (4,5). On observe que les règles restantes ne peuvent pas faire apparaitre de nouvelle occurrence du type $\mathbf{1}$. Ainsi il ne peut y avoir une infinité d'occurrences des règles (1), (2), (6) ou (7).
- En se plaçant suffisamment loin dans notre séquence il ne reste plus que la règle (3) et une simple mesure permet de voir que la règle ne peut être appliquée qu'un nombre fini de fois : on associe cette fois à chaque $\times$ un poids correspondant au nombre de $\times$ dont il est sous-terme droit.

On conclut qu'il ne peut y avoir de réduction infinie. Pour la confluence, il suffit désormais de montrer la confluence locale. Les seuls cas non triviaux sont ceux des paires critiques, i.e., quand les deux redexes se recouvrent.

- Si l'on fait (4) et (5) sur $(A \times B) \Rightarrow (C \times D)$, on referme la paire, avec les mêmes règles, sur $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \times (A \Rightarrow B \Rightarrow D)$.
- Si l'on fait (4) et (3) sur $(A \times (B \times C)) \Rightarrow D$ on referme avec les mêmes règles sur $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$.
- Si l'on fait (4) et (7) on referme sur $\mathbf{1}$. De même avec (4) et (7), ou encore (7) et (6).
- Si l'on fait (4) et (1) sur $(A \times \mathbf{1}) \Rightarrow B$ on referme sur $A \Rightarrow B$. De même avec (4) et (2).
- On devrait énumérer encore tous les cas de (5) contre (3), (6), (1), etc.

Question 10
On considère l'axiomatisation $\simeq_\times$ obtenue à partir des équations induites par $\rightsquigarrow$, et la commutativité $A \times B \simeq_\times B \times A$. Montrer que $T \simeq_\Rightarrow T'$ implique $T \simeq_\times T'$.

Correction 10
Il suffit de dériver $A \Rightarrow B \Rightarrow C \simeq_\times B \Rightarrow A \Rightarrow C$. Cela découle de l'axiome (4) et de la commutativité.

Question 11
On suppose $p : T_1 \times \ldots \times T_n, \Gamma \vdash M : T'$ avec M en forme β-normale η-longue, $\Gamma = z_1 : A_1, \ldots, z_n : A_n$, et les A_j, T_i et T' sont des types de $\Lambda^\Rightarrow$, c'est à dire sans occurrence des constructeurs $\times$ et $\mathbf{1}$. Montrer que M peut s'écrire $M'[x_i := \pi_i^n(p)]_{1 \leq i \leq n}$ où les variables x_i n'apparaissent pas dans M, et M' est un terme de $\Lambda^\Rightarrow$.

Correction 11
On procède par induction sur la forme β-normale η-longue M. Par hypothèse, M ne peut être de type produit ou $\mathbf{1}$. Si M est de type flèche alors $M = \lambda x.\ M_1$. On obtient M_1' par hypothèse d'induction (le contexte enrichi est toujours de la bonne forme car le domaine de la flèche est toujours un type simple) et $M' := \lambda x.\ M_1'$ convient. Si M est de type atomique alors c'est une succession d'applications et de projections sur une variable du contexte. Si on part d'une variable de Γ, on va toujours obtenir des types de $\Lambda^\Rightarrow$ par élimination, et on ne pourra donc effectuer que des applications. Si les éliminations portent sur p, ce seront forcément des projections jusqu'à obtenir un terme dont le type est dans $\Lambda^\Rightarrow$. On aura alors construit un $\pi_i^n(p)$, sur lequel on pourra encore procéder à des applications. En résumé, M est soit de la forme $x\ M_1 \ldots M_l$, soit de la forme $\pi_i^n(p)\ M_1 \ldots M_l$, avec dans les deux cas des termes M_i en forme β-normale η-longue et de types dans $\Lambda^\Rightarrow$. On peut appliquer l'hypothèse d'induction à ces termes, on obtient des M_i', et l'on construit un M' convenable en prenant soit $x\ M_1' \ldots M_l$ soit $x_i\ M_1' \ldots M_l'$.
Plusieurs personnes ont utilisé un argument sémantique pour dire que les fonctions M et N ne peuvent ignorer d'argument. C'est incomplet, à moins de donner proprement une sémantique pour notre calcul. Il fallait vraiment faire un argument s'appuyant sur la définition formelle de la convertibilité.

Question 12
Soit $m, n > 1$, $M = \lambda p.\ \langle M_1, \ldots, M_m \rangle \theta$ et $N = \lambda q.\ \langle N_1, \ldots, N_n \rangle \theta'$ des termes en formes β-normales η-longues, avec les M_i et N_j termes de $\Lambda^\Rightarrow$, et $\theta = [y_i := \pi_i^n(p)]_{1 \leq i \leq n}$ et $\theta' = [y_i' := \pi_i^m(q)]_{1 \leq i \leq m}$. Montrer que si M et N sont inverses l'un de l'autre, alors $m = n$ et il existe une bijection σ tel que $(\lambda y_{\sigma(i)}.\ M_i)$ et $(\lambda y_i'.\ N_{\sigma(i)})$ soient (clos et) inverses l'un de l'autre. On admettra, comme dans la première partie, que M et N ne comportent aucune abstraction vide.

Correction 12
On exprime la condition d'inversibilité :

$$\lambda q.\ q =_{\beta\eta} \lambda q.\ \langle M_1, \ldots, M_m \rangle [y_i := N_i \theta']_i$$

L'égalité des formes β-normales η-longues implique que $M_k[y_i := N_i\theta']_i =_{\beta\eta} \pi_k^m(q)$. Étant donné que q n'apparaît pas dans M_k, et que sa variable de tête ne peut être liée sans que la condition d'invertibilité

précédente soit violée, on doit avoir un $y_{k'}$ en tête de M_k. Posons $\sigma(k) = k'$. De façon symétrique, on observe que chaque N_j a en tête la variable $y'_{\sigma'(j)}$.
Montrons que ces deux fonctions sont inverses l'une de l'autre, on aura ainsi nos bijections et $n = m$. On considère le terme $N_{\sigma(k)}$, qui a en tête la variable $y'_{k'}$ pour $k' = \sigma'(\sigma(k))$, et on veut montrer $k' = k$. La substitution θ' envoie $y'_{k'}$ sur $\pi^m_{k'}(q)$. On doit donc avoir $\beta\eta$-convertibilité entre $\pi^m_k(q)$ et un terme s'écrivant $\lambda x_1 \ldots \lambda x_r.\ \pi^m_{k'}(q)\ P_1 \ldots P_s$. La β-réduction ne peut rien changer à la tête de ce terme, et η_0 ne peut plus changer la projection car elle a déja un type atomique, on a donc nécessairement $\pi^m_k(q) = \pi^m_{k'}(q)$ et ainsi $k = k'$.
Si M_k (forme normale) contenait une autre variable $y_{\sigma'(j)}$, on aurait une occurrence de $\pi^m_j(q)$ dans $M_k[y_i := N_i\theta']_i$. Ce terme doit être convertible à $\pi^m_k(q)$. Les projections de q ne sont plus β-réductibles et peuvent être traitées comme des blocs atomiques ici. La seule possibilité, outre $j = k$, est que la β-réduction fasse disparaitre $\pi^m_j(q)$, car la η_0-expansion ne fait jamais rien disparaitre. Mais l'on a supposé qu'il n'y avait pas d'abstraction vide ici, c'est donc absurde.
On peut enfin simplifier notre équation : $M_k[y_{\sigma(k)} := N_{\sigma(k)}[y'_k := \pi^m_k(q)]] =_{\beta\eta} \pi^m_k(q)$. Comme dit précédemment, $\pi^m_k(q)$ ne se réduira pas et peut être traité de façon atomique, ce qui nous permet d'écrire notre équation de façon équivalente en : $M_k[y_{\sigma(k)} := N_{\sigma(k)}] =_{\beta\eta} y'_k$. Avec l'équation symétrique, cela signifie que M_k et $N_{\sigma(k)}$ sont inverses l'un de l'autre.

Question 13
Montrer que $T \simeq_\times T'$ si et seulement si $T \simeq T'$ dans $\Lambda^{\Rightarrow\times\mathbf{1}}$.

Correction 13
On a immédiatemment le sens direct car on a vu que $\rightsquigarrow$ est incluse dans l'isomorphisme, et la commutativité est clairement un isomorphisme. On se concentre donc sur la réciproque. Si $T \simeq T'$ alors leurs formes $\rightsquigarrow$-normales sont aussi isomorphes, puisqu'on a montré qu'il y a $\simeq$ entre un type et sa forme $\rightsquigarrow$-normale. Il nous suffit de montrer le résultat dans le cas où T et T' sont normaux.
Soient M et N réalisant l'isomorphisme entre T et T'. On peut prendre ces termes en forme β-normale η-longue.

- Si l'un des deux est $\mathbf{1}$, par exemple $M : T \to_\beta \mathbf{1}$, alors M est $\lambda x.\ \langle\rangle$, la condition d'inversibilité s'écrit donc $\lambda x.\ x =_{\beta\eta} \lambda x.\ \langle\rangle$ ce qui n'est possible que si $x : T' = \mathbf{1}$, ce qui permet de conclure facilement.
- Si T et T' sont des types de $\Lambda^{\Rightarrow}$, on observe qu'ils sont aussi isomorphes dans $\Lambda^{\Rightarrow}$ car M et N sont clos et leurs types sont dans $\Lambda^{\Rightarrow}$, et fournissent donc un témoin d'isomorphisme dans le sous-système. On conclut par conservativité de $\simeq_\times$.
- Si l'un des T est un produit, par exemple $M : T \to_\beta T'_1 \times T'_2$ alors on a $M = \lambda x.\ \langle M_1, M_2\rangle$ et l'inversibilité s'écrit $\lambda x.\ \langle M_1\theta, M_2\theta\rangle = \lambda x.\ x$ ce qui n'est possible que si le type de x (c'est à dire T) est aussi une paire.
  On va en fait directement traiter le cas où T et T' s'écrivent respectivement $S_1 \times \ldots \times S_n$ et $S'_1 \times \ldots \times S'_m$ avec $n, m > 1$ et les S_i et S'_j types de $\Lambda^{\Rightarrow}$. Les termes M et N s'écrivent alors respectivement $\lambda p.\ \langle M_1, \ldots, M_m\rangle$ et $\lambda q.\ \langle N_1, \ldots, N_n\rangle$. Par la question 11 on réécrit les M_i en $M'_i\theta$, et N_j en $N'_j\theta'$ avec les M'_i et N'_j termes de $\Lambda^{\Rightarrow}$. Cela nous permet d'appliquer la question précédente, pour obtenir $m = n$ et une bijection entre les M'_i et N'_j, reliant un terme à un inverse. On en déduit que S_k et $S'_{\sigma(k)}$ sont isomorphes dans $\Lambda^{\Rightarrow}$. Par conservativité (question 10) on obtient alors $S_k \simeq_\times S'_{\sigma(k)}$, et enfin $T \simeq_\times T'$ par associativité et commutativité.