Correction de la question 2. Supposons $(a_j, b_j)_{j<i}$ joués en respectant l'invariant, et S joue a_i – c'est symétrique quand S joue dans M_2. On a trois cas [1] :

- Si $a_i = s^k(a_j)$ avec $k \leq 2^{n-i}$ alors $b_i := s^k(b_j)$.
- Si $a_j = s^k(a_i)$ avec $k \leq 2^{n-i}$ alors on prend b_i tel que $s^k(b_i) = b_j$. L'existence est garantie par la question 2 car $d_1(b_j, 0) < k$ entraine $d_1(b_j, 0) = d_1(a_j, 0)$ ce qui est absurde, car c'est soit infini soit plus grand que k.
- Sinon on choisit $b_i = s^d(b)$ avec $d = 1 + 2^{n-i}$ et b à distance maximale de 0 parmi les b_j.

Vérifions que la construction est bien définie, *i.e.*, que le choix de b_i est unique.

- Il ne peut y avoir confusion dans le premier cas : si $s^k(a_j) = s^{k'}(a_{j'})$ avec $k' \leq k \leq 2^{n-i}$ alors $a_j = s^{k-k'}(a_{j'})$ (par récurrence et A1) et $d_1(a_j, a_{j'}) = k - k' \leq 2^{n-i} \leq 2^{n-i+1}$ donc $d_2(b_j, b_{j'}) = k - k'$ et $s^k(b_j) = s^{k'}(b_{j'})$.
- Il n'y a pas de confusion dans le second cas : si $s^k(a_i) = a_j$ et $s^{k'}(a_i) = a_{j'}$, alors $a_j = s^{k-k'}(s^{k'}(a_i)) = s^{k-k'}(a'_j)$ donc $b_j = s^{k-k'}(b'_j)$ et donc $s^k(x) = b_j$ et $s^{k'}(x') = b_{j'}$ impliquent $s^k(x) = s^{k-k'}(b'_j) = s^k(x')$ donc $x = x'$ par (A_1).
- Si les deux premiers cas sont rencontrés, on a $a_i = s^k(a_j)$ et $a_{j'} = s^{k'}(a_i)$ ce qui nous donne $a_{j'} = s^{k+k'}(a_j)$ donc $d_1(a'_j, a_j) = k + k' \leq 2^{n-i+1}$ et $d_2(b_{j'}, b_j) = k + k'$ donc $s^{k+k'}(b_j) = b_{j'}$ et ainsi on a bien $s^k(b_j)$ (un candidat pour b_i) qui coincide avec le k'-ème prédecesseur de $b_{j'}$ (l'autre candidat).

On vérifie ensuite l'invariant est maintenu. Une partie est triviale : si on a $d_1(a_i, a_j) \leq 2^{n-i}$ alors on a fait en sorte que $d_2(b_i, b_j) = d_1(a_i, a_j)$; de même pour $d_1(a_j, a_i) \leq 2^{n-i}$. Si on a $d_2(b_i, b_j) = k' \leq 2^{n-i}$ alors c'est qu'on est dans un des deux premiers cas :

- Si on a $d_1(a_i, a_{j'}) = k \leq 2^{n-i}$ alors $d_2(b_i, b_{j'}) = k$ par construction. Si $k \geq k'$ on a $s^{k-k'}(b_{j'}) = b_j$ donc $s^{k-k'}(a_{j'}) = a_j$ par hypothèse et on a bien $a_i = s^k(a_{j'}) = s^{k'}(a_j)$. Si $k < k'$ alors $s^{k'-k}(b_j) = b_{j'}$ donc $s^{k'-k}(a_j) = a_{j'}$ et avec $a_i = s^k(a_{j'})$ cela nous donne encore $a_i = s^{k'}(a_j)$.
- Si $d_1(a_{j'}, a_i) = k \leq 2^{n-i}$ alors on a construit b_i tel que $d_2(b_{j'}, b_i) = k$. On a donc $d_2(b_{j'}, b_j) = k + k' \leq 2^{n-i+1}$ et par hypothèse $d_1(a_{j'}, a_j) = k + k'$. On a donc $a_{j'} = s^{k+k'}(a_j)$ et $a_{j'} = s^k(a_i)$ ce qui nous donne $s^{k'}(a_j) = a_i$ par A1, et donc $d_1(a_i, a_j) = k'$.

1. Attention : pour $v \in D_i$, on écrit abusivement $s(v)$ pour $s_{M_i}(v)$.