Logique 2

Hubert Comon David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Dans ce TD, on ne considèrera que des structures qui interprètent le prédicat d'égalité comme l'égalité sur leur domaine.

Exercice 1
Soit $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{R(2), =\}$. On considère les structures $\mathcal{S}_1$ consistant en un graphe non orienté G à 5 sommets $a_0, \dots, a_4$ reliés en anneau (où R est donc interprété comme une relation symétrique telle que $a_i \ \hat{R} \ a_{(i+1) \mod 5}$) et $\mathcal{S}_2$ consistant en deux copies disjointes de G.

1. Montrer que, pour tous sommets b, b' dans le domaine de $\mathcal{S}_2$ on peut trouver deux sommets $a_i, a_j \in G$ tels que la fonction h définie par $h(a_i) = b$ et $h(a_j) = b'$ soit un isomorphisme partiel de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$.
2. Qu'en est-il pour 3 sommets ?

Exercice 2
Soient $\mathcal{S}_1$ de domaine D_1, $\mathcal{S}_2$ de domaine D_2 et h une fonction partielle de D_1 dans D_2 de domaine de définition $\{a_1, \dots, a_n\}$. On a vu en cours que h est un isomorphisme partiel de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$ ssi pour toute formule atomique *plate* ϕ de variables libres $x_1, \dots, x_n$ on a

$$\mathcal{S}_1, \{x_i \mapsto a_i\}_{i=1\dots n} \models \phi \ \text{ ssi } \ \mathcal{S}_2, \{x_i \mapsto h(a_i)\}_{i=1\dots n} \models \phi$$

Montrer que le résultat est faux sans l'hypothèse de platitude.

Exercice 3
Donner deux structures $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ telles que $\mathcal{S}_1 \not\equiv \mathcal{S}_2$ et il existe un isomorphisme partiel de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$ dont le domaine a (au moins) 3 éléments.

Exercice 4

On considère $\mathcal{F} = \{s(1), 0(0)\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$ et la théorie $\mathcal{T}$ engendrée par les axiomes de l'égalité et :

$$\begin{array}{lllll} (A_1) & \forall x \forall y. & s(x) = s(y) & \rightarrow & x = y \\ (A_2) & \forall x. & x \neq 0 & \rightarrow & \exists y.\ x = s(y) \\ (A_3) & \forall x. & 0 \neq s(x) & & \\ (A_4^n) & \forall x. & x \neq s^n(x) & & \end{array}$$

Soient M_1 et M_2 deux modèles de $\mathcal{T}$, de domaines D_1 et D_2. On note $d_i(a,b)$ la fonction définie sur $D_i \times D_i$ par $d_i(a,b) = \min\{n \in \mathbb{N} \ :\ a = s^n_{M_i}(b)\}$. Le minimum est $+\infty$ s'il n'y a pas de tels entiers.

1. Soit $i \in \{1,2\}$. Montrer que pour tout $a \in D_i$, $k \in \mathbb{N}$, on a $d_i(s^k(a), a) = k$, et que pour tout $a, b, c \in D_i$, $d_i(a,b) + d_i(b,c) < +\infty$ entraîne $d_i(a,b) + d_i(b,c) = d_i(a,c)$.
2. Montrer que pour tout $a \in D_i$, $k \in \mathbb{N}$, $d_i(a, 0_{M_i}) \geq k$, il existe un $b \in D_i$ tel que $a = s^k_{M_i}(b)$.
3. On considère un jeu de Erhenfeucht-Fraïssé sur M_1, M_2 à n rondes où les coups successifs de D et S sont donnés par les séquences $a_1, \ldots, a_n \in D_1$ et $b_1, \ldots, b_n \in D_2$. On pose de plus $a_0 = 0_{M_1}$ et $b_0 = 0_{M_2}$. Montrer que D a une stratégie qui permet d'assurer l'invariant suivant : *pour tout $i \leq n$, $j_1, j_2 \leq i$, si $d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) \leq 2^{n-i}$ ou $d_2(b_{j_1}, b_{j_2}) \leq 2^{n-i}$ alors $d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) = d_2(b_{j_1}, b_{j_2})$.*
4. Montrer que $\mathcal{T}$ est complète.
5. Les axiomes (A_4^n) sont-ils tous nécessaires pour la complétude ? Peut-on n'en garder qu'un sous-ensemble fini ?