Logique 2

Hubert Comon David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 — Ordres denses
On considère $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{ =, < \}$.

1. Soit ϕ une formule, $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ ses variables libres, $\sigma_1 = (x_i \mapsto a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\sigma_2 = (x_i \mapsto b_i)_{1\leq i\leq n}$ deux affectations à valeurs dans $\mathbb{Q}$ telles que $a_1 < \ldots < a_n$ et $b_1 < \ldots < b_n$.
   Montrer que $\mathbb{Q}, \sigma_1 \models \phi$ ssi $\mathbb{Q}, \sigma_2 \models \phi$.
2. Soit $\forall x.\phi$ une formule, $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ ses variables libres et $\sigma = (x_i \mapsto a_i)_i$ une affectation à valeurs dans $\mathbb{Q}$ avec $a_1 \leq \ldots \leq a_n$. Montrer que $\mathbb{Q}, \sigma \models \forall x.\phi$ ssi
   - ou bien $n = 0$ et $(x \mapsto 0) \models \phi$;
   - ou bien $n > 0$ et les priorités suivantes sont satisfaites :
     - pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\sigma, (x \mapsto a_i) \models \phi$;
     - pour tout $1 \leq i < n$, on a $\sigma, (x \mapsto (a_i + a_{i+1})/2) \models \phi$;
     - $\sigma, (x \mapsto a_1 - 1) \models \phi$;
     - $\sigma, (x \mapsto a_n + 1) \models \phi$.
3. Donner un équivalent de la question précédente lorsque la formule est existentielle.
4. Montrer que la théorie des ordres denses est dans PSPACE.
5. Montrer qu'elle est PSPACE-complète.

Exercice 2 — Ordres discrets
On considère $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{ =, \geq \}$. On axiomatise les ordres discrets par les axiomes de l'égalité et :

Refl.	$\forall x.\ x \geq x$
Anti.	$\forall x \forall y.\ x \geq y \to y \geq x \to x = y$
Trans.	$\forall x \forall y \forall z.\ x \geq y \to y \geq z \to x \geq z$
Tot.	$\forall x \forall y.\ x \geq y \vee y \geq x$
Min.	$\exists x \forall y.\ y \geq x$
D1	$\forall x \exists y.\ y \geq x \wedge y \neq x \wedge \forall z.\ z \geq x \to z \neq x \to z \geq y$
D2	$\forall x.\ (\forall y.\ y \geq x) \vee \exists y.\ x \geq y \wedge y \neq x \wedge \forall z.\ x \geq z \to z \neq x \to y \geq z$

On note D cet ensemble d'axiomes, et D' les deux suivants :

Zéro	$\forall x.\ x = 0 \leftrightarrow \forall y.\ y \geq x$
Succ.	$\forall x \forall y.\ s(x) = y \leftrightarrow (y \geq x \wedge y \neq x \wedge \forall z.\ z \geq x \to z \neq x \to z \geq y)$

On s'intéresse à la décidabilité de D.

1. Montrer que les formules suivantes sont des conséquences de $D + D'$:
   - $\forall x.\ x \geq 0$
   - $\forall x.\ x \neq 0 \to \exists y.\ x = s(y)$
   - $\forall x.\ 0 \neq s(x)$
   - $\forall x \forall y.\ s(x) = s(y) \to x = y$
2. Montrer que $D + D'$ est une extension conservative de D, c'est à dire que pour tout $\phi \in \mathsf{FO}(\mathcal{P}, \mathcal{F})$, on a $D \vDash \phi$ ssi $D + D' \vDash \phi'$.
3. Montrer que la théorie des ordres discrets est complète et récursive.