TD2 18 avril 2013

Logique 2

Hubert Comon David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Dans les exercices, on supposera toujours que PA et Q sont cohérentes.

Exercice 1
Montrer que PA contient strictement l'arithmétique élémentaire et est srictement contenue dans Th($\mathbb{N}$).

Exercice 2
Montrer, par un argument diagonal, que PA est indécidable.

Exercice 3
Soit Φ l'ensemble des formules closes du premier ordre sur les prédicats $\{=\}$ et la signature $\{0, s, +, \times\}$. Si Π est une preuve de $Q \vdash \phi$, on note $\langle \Pi(\phi) \rangle$ son code dans $\mathbb{N}$. On note $\mathbb{N}$ le modèle standard de Q. Finalement, on pose $D = \{ \ (\langle \phi \rangle, \langle \Pi(\phi) \rangle) \ \}$ et $\phi_D(x, y)$ une formule qui représente D dans Q.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies pour tous les énoncés $\phi \in \Phi$? Justifier.

1. $\mathbb{N} \models \phi \rightarrow \exists x.\ \phi_D(\overline{\langle \phi \rangle}, x)$
2. $Q \vdash \phi \rightarrow \exists x.\ \phi_D(\overline{\langle \phi \rangle}, x)$
3. $\mathbb{N} \models (\exists x.\ \phi_D(\overline{\langle \phi \rangle}, x)) \rightarrow \phi$
4. $Q \vdash (\exists x.\ \phi_D(\overline{\langle \phi \rangle}, x)) \rightarrow \phi$

Exercice 4
Soit ϕ_{PA} la formule représentant dans PA la prouvabilité dans PA : $\mathrm{PA} \vdash F$ implique $\mathrm{PA} \vdash \phi_{\mathrm{PA}}(F)$. On suppose que le système de preuve choisi pour représenter la prouvabilité dans PA est tel qu'on a pour toutes formules F et G, $\mathrm{PA} \vdash \phi_{\mathrm{PA}}(\langle F \rangle) \rightarrow \phi_{\mathrm{PA}}(\langle F \rightarrow G \rangle) \rightarrow \phi_{\mathrm{PA}}(\langle G \rangle)$.

1. Montrer que $\mathrm{PA}, F \vdash \neg \phi_{PA}(\neg F)$ implique que $\mathrm{PA} + F$ est incohérente.
2. Montrer que $PA, \phi_{PA}(F) \vdash F$ entraîne $PA \vdash F$.