TD1 4 avril 2013

Logique 2

Hubert Comon David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1
Parmi les énoncés suivants, prouver ceux qui sont vrais et expliquer pourquoi les autres ne le sont pas forcément :

1. Une théorie T est cohérente ssi $T \not\vdash \bot$.
2. Une théorie complète et récursivement énumérable est récursive.
3. Une théorie récursive est complète.
4. Soit un ensemble de structures tel que pour tout i, j, ϕ, $S_i \models \phi$ ssi $S_j \models \phi$. Alors $\{\phi : \exists i.\ S_i \models \phi\}$ est complète.
5. Si T est cohérente et $T \not\vdash \phi$ alors $T \cup \{\neg\phi\}$ est cohérente.

Exercice 2

1. Montrer que l'addition, la multiplication et le reste de la division euclidienne sont définissables dans l'arithmétique élémentaire.
2. Montrer que la fonction β de Gödel l'est aussi.
3. Montrer que la fonction $n \mapsto 2^n$ est définissable dans l'arithmétique élémentaire.

Exercice 3

1. Montrer que le problème suivant est indécidable :
   Donnée: une fonction récursive primitive f;
   Question: est-ce que $f(x) = 0$ pour tout x ?
2. On note $\langle f \rangle$ le code d'une fonction récursive (partielle) f. Montrer que la totalité d'une fonction récursive ne peut être définissable dans une théorie cohérente, c'est à dire qu'on ne peut avoir de formule ϕ_t à un paramètre tel que $T \vdash \phi_t(\langle f \rangle)$ ssi f est totale.

Exercice 4
Considérons une théorie T récursivement énumérable. Montrer que si les fonctions récursives sont définissables dans T, et que T est complète, alors tout ensemble récursivement énumérable est récursif.