TD9 26 novembre 2012

Logique & Calculabilité

Hubert Comon $\wedge$ David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 0 (Questions de cours)

1. La classe des langages récursifs (resp. récursivement énumérables) est-elle close par union, intersection, complémentaire ? Justifier.
2. Donner une machine de Turing qui termine sur toute entrée de $\{0,1\}^*$ et accepte un mot si et seulement si il contient au moins autant de 0 que de 1.

   On pourra s'aider d'un simulateur, par exemple `http://morphett.info/turing/turing.html`, avant de prouver que sa machine est correcte. De nombreux simulateurs (dont celui cité) offrent un ruban infini dans les deux directions, qu'on utilisera alors comme une machine du cours en mettant un marqueur de début \$ qu'on ne dépassera jamais.

Exercice 1 (Questions existentielles)
Parmi les trois fonctions suivantes, deux sont calculables. Lesquelles ?

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= \begin{cases} 0 & \text{si Dieu existe} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
f_2(n) &= \begin{cases} 0 & \text{si les décimales de } \pi \text{ contiennent la sous-séquence } 3^n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
f_3(n) &= \begin{cases} 0 & \text{si les décimales de } \pi \text{ contiennent} \\ & \text{une sous-séquence maximale de 3 de longueur } n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Exercice 2 (Ruban bi-infini)
On considère le modèle de calcul des machines de Turing à ruban bi-infini. On supprime le symbole spécial \$ et les contraintes associées, de sorte que

les machines peuvent lire et écrire aussi loin que nécessaire vers la gauche. Une configuration initiale est un triplet (ϵ, q_0, w) et une configuration finale un triplet (w, q, w') avec $q \in \{\mathbf{accept}, \mathbf{reject}\}$. La relation de transition est donnée comme dans le cours, en adaptant pour que la bande soit étendue par du blanc au fur et à mesure qu'on avance vers la gauche. La définition de fonction calculable est aussi adaptée naturellement, en ignorant les blancs terminaux à gauche comme à droite.

Montrer qu'une fonction est calculable dans ce modèle ssi elle est calculable par une machine de Turing.

Exercice 3 (Castors affairés)
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des machines de Turing à ruban bi-infini, sur l'alphabet $\{1, B\}$, à n états (sans compter **accept** et **reject**) et qui acceptent le mot vide.

Si $M \in \mathcal{E}_n$, on note $f(M)$ le nombre de 1 inscrits sur le ruban quand, sur la donnée ϵ, M s'arrête en acceptant. On considère la fonction $\textsc{Score}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\textsc{Score}(n) = \max\{f(M) \mid M \in \mathcal{E}_n\}$.

1. Calculer $\textsc{Score}(2)$.
2. Montrer que $\textsc{Score}$ n'est pas calculable.
3. Montrer que $\textsc{Score}(3) \geq 6$ — en fait, on a égalité.

Exercice 4 (Deux états)

1. Montrer que toute fonction calculable est calculable par une machine de Turing à deux états (sans compter **accept** et **reject**).
2. Montrer qu'une fonction sur les entiers (codés en binaire) calculable par une machine de Turing sur un alphabet Σ est calculable par une machine de Turing sur l'alphabet $\{0, 1, B, \$\}$.
3. Peut-on réaliser les deux simplifications à la fois ?

Exercice 5 (Énumération)
Montrer que L est un langage récursivement énumérable ssi il existe une machine de Turing M à deux rubans et un état distingué q_e tel que

$$(\epsilon, q_0, \$, \$) \vdash_M^* (\epsilon, q_e, \$w', \$w) \text{ ssi } w \in L$$