TD8 14 novembre 2012

Logique & Calculabilité

Hubert Comon $\wedge$ David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 0 (Questions de cours)

1. Réduire complètement les problèmes d'unification suivants en utilisant les règles du cours : $f(x, g(a, y)) \stackrel{?}{=} f(h(y), g(y, a)) \wedge g(x, h(y)) \stackrel{?}{=} g(z, z)$; $f(x, x) \stackrel{?}{=} f(g(y), z) \wedge h(z) \stackrel{?}{=} h(y)$; $f(x, a) \stackrel{?}{=} f(b, y) \wedge f(x) \stackrel{?}{=} f(y)$.
2. Montrer que le mgu est unique à renommage près : étant donnés σ et θ mgus de $u \stackrel{?}{=} v$, il existe un renommage ρ tel que $\sigma = \theta\rho$.
3. Donner l'ensemble des clauses que l'on peut obtenir par résolution à partir de la formule $\forall x. \neg p(x) \vee p(s(x))$.
4. Donner un modèle ou une preuve d'insatisfaisabilité par résolution pour la théorie suivante :

$$\{ \ \forall x. p(x, f(f(x))),\ \forall y.\ p(f(f(f(y))), y), \\ \forall x \forall y \forall z.\ p(x, y) \rightarrow p(y, z) \rightarrow p(x, z),\ \forall x \forall y.\ \neg p(x, y) \vee \neg p(y, x) \ \}$$

Exercice 1

On se propose d'abandonner la règle de factorisation, et de traiter les clauses du premier ordre comme des ensembles de littéraux, en identifiant notamment $L \vee L$ et L à $\{L\}$, et $\perp$ à $\emptyset$.

1. Dériver $\perp$ à partir de

$$\forall x \forall y.\ \big(p(x) \vee p(y) \vee q(x, y)\big) \wedge \big(\neg p(x) \vee \neg p(y) \vee q(x, y)\big) \wedge \big(\neg q(x, x)\big)$$

2. On considère maintenant la théorie

$$\{ \ \forall x \forall y. (p(x, y) \vee p(y, x)),\ \forall x \forall y. (\neg p(x, y) \vee \neg p(y, x)) \ \}$$

Quelles clauses peuvent être dérivées à partir de cette théorie dans notre système modifié ? Que peut on en conclure ?

Exercice 2
Soit S un ensemble fini de clauses qui possède un plus petit modèle de Herbrand $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est récursivement énumérable.

Exercice 3
On appelle anti-unificateur de deux termes u et v un terme t tel qu'il existe des substitutions σ et θ telles que $u = t\sigma$ et $v = t\theta$. Montrer que toute paire de termes possède un anti-unificateur le moins général (ou le plus spécialisé) et donner un algorithme pour le calculuer.