TD6 22 octobre 2012

Logique & Calculabilité

Hubert Comon $\wedge$ David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 (Clauses de Horn dans LK_0^-)
On considère la restriction *input* de LK_0^-, où l'on force la prémisse gauche de la règle d'implication à être un axiome :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \phi}\text{ axiom} \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \to \psi \vdash \Delta} \to\text{left}$$

1. Montrer que cette stratégie n'est pas complète en général.
2. On considère maintenant le cas particulier d'un séquent $\Gamma \vdash A$ où A est un littéral positif et les formules de Γ sont de la forme $A_1 \to \ldots \to A_n \to A_{n+1}$ où les A_i sont aussi des littéraux positifs.
   Montrer que si un séquent de cette forme est prouvable dans LK_0^- alors il est aussi prouvable en respectant la stratégie *input*.
3. En déduire un algorithme en temps polynômial pour décider $\Gamma \models A$.

Exercice 2
On considère l'alphabet (ou signature) $\mathcal{F} = \{s(1)\}$.

1. Donner deux $\mathcal{F}$-algèbres finies ayant même domaine et telles qu'il n'existe aucun morphisme de l'une dans l'autre.
2. Donner deux $\mathcal{F}$-algèbres distinctes, de même domaine et isomorphes.
3. Donner toutes les $\mathcal{F}$-algèbres modulo isormorphisme, pour un domaine ayant 1, 2 et 3 éléments.

Exercice 3
Montrer que les formules $\exists x \forall y.\ P(x, y)$ et $\forall y \exists x.\ P(x, y)$ ne sont pas équivalentes. L'une de ces formules implique-t-elle l'autre ?

Exercice 4
Dans cet exercice, on peut librement choisir $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$.

1. Donner une formule satisfaisable dont tous les modèles sont finis.
2. Donner une formule satisfaisable qui n'a pas de modèle fini.

Exercice 5
Supposant que $\mathcal{P}$ ne contient que des symboles de prédicats unaires et que $\mathcal{F}$ ne contient que des symboles de fonction unaires, montrer que toute formule satisfaisable admet un modèle fini. (On pourra se limiter au cas où $\mathcal{F}$ est vide.)

Exercice 6 (examen 2011-2012)
On dit que deux structures sont *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes formules du premier ordre. On pose $\mathcal{P} = \{\geq\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, et on considère les $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ où $\geq$ est interprété de façon canonique.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.
2. On va montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont élémentairement équivalents. Si σ est une substitution à valeurs dans $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$) on note $\geq_\sigma$ la relation d'ordre définie par $x \geq_\sigma y$ ssi $x\sigma \geq_{\mathcal{S}} y\sigma$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}, \sigma \vDash \phi$ ssi pour toute affectation θ telle que $\geq_\theta$ est identique à $\geq_\sigma$, on a $\mathcal{S}, \theta \vDash \phi$.
   (b) Conclure.

Exercice 7
On prend $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2), \times(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$. On considère la théorie $\mathcal{A}_{elem}$ formée des axiomes de l'égalité et des 7 formules suivantes :

$$\forall x.\ 0 + x = x \qquad \forall x.\ s(x) + y = s(x + y)$$
$$\forall x.\ 0 \times x = x \qquad \forall x.\ s(x) \times y = (x \times y) + y$$
$$\forall x.\ x = 0 \vee \exists y.\ x = s(y) \qquad \forall x.\ s(x) \neq 0 \qquad \forall x \forall y.\ s(x) = s(y) \to x = y$$

Donner un modèle $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}_{elem}$ tel que $\mathcal{S} \nvDash \forall x.\ x + 0 = x$.