TD5 15 octobre 2012

Logique & Calculabilité

Hubert Comon $\wedge$ David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1
Parmi les jugements suivants, dire ceux qui sont prouvables dans NJ_0, en justifiant :

1. $P \vee \neg P$
2. $\neg(P \wedge \neg P)$
3. $\neg\neg P \to P$
4. $\neg\neg\neg P \to \neg P$
5. $(P \to Q) \vee (Q \to P)$

Exercice 2
On va montrer que le tiers exclu n'est pas dérivable dans NJ_0, sans utiliser les structures de Kripke. On considère à la place l'interprétation suivante des formules de NJ_0 dans l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle. Étant donnée une interprétation $I(p)$ des variables propositionnelles en ouverts de $\mathbb{R}$, on l'étend par induction aux formules :

- $I(\bot) = \emptyset$ et $I(\top) = \mathbb{R}$;
- $I(\phi \wedge \psi) = I(\phi) \cap I(\psi)$ et $I(\phi \vee \psi) = I(\phi) \cup I(\psi)$;
- $I(\neg\phi)$ est l'intérieur de $\mathbb{R} \setminus I(\phi)$;
- $I(\phi \to \psi)$ est l'intérieur de $(\mathbb{R} \setminus I(\phi)) \cup I(\psi)$.

Un jugement $\Gamma \vdash P$ est dit valide si pour tout I on a $\cap_{Q\in\Gamma} I(Q) \subseteq I(P)$.

1. Montrer que le tiers exclu n'est pas valide.
2. Montrer que tout jugement prouvable dans NJ_0 est valide.

Exercice 3
On considère la règle

$$\frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P} \text{ (restart)}$$

que l'on ne peut appliquer que lorsque Q est la conclusion d'un jugement précédemment rencontré dans la preuve, c'est à dire qu'un jugement $\Delta \vdash Q$ est présent entre la conclusion finale de la preuve et le jugement $\Gamma \vdash P$ qui conclut l'application de la règle *restart*.

Montrer que NJ_0 + *restart* est correct et complet pour la logique classique.

Exercice 4
Dériver toutes les formules de l'exercice 1 dans le système LK_0^-.

Exercice 5 (Clauses de Horn dans LK_0^-)
On considère la restriction *input* de LK_0^-, où l'on force la prémisse gauche de la règle d'implication à être un axiome :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \phi}\text{ axiom} \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \to \psi \vdash \Delta} \to\text{left}$$

1. Montrer que cette stratégie n'est pas complète en général.
2. On considère maintenant le cas particulier d'un séquent $\Gamma \vdash A$ où A est un littéral positif et les formules de Γ sont de la forme $A_1 \to \ldots \to A_n \to A_{n+1}$ où les A_i sont aussi des littéraux positifs. Montrer que si un séquent de cette forme est prouvable dans LK_0^- alors il est aussi prouvable en respectant la stratégie *input*.
3. En déduire un algorithme en temps polynômial pour décider $\Gamma \vDash A$.

Exercice 6
Le système LK_0 est obtenu en ajoutant la règle *cut* au système LK_0^-. On va donner une traduction effective entre les preuves de LK_0 et celles de NK_0, en s'interdisant donc d'utiliser les théorèmes de complétude. On annote le signe $\vdash$ avec le nom d'un système afin de préciser le jeu de règles à utiliser pour dériver le jugement.

1. Montrer que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}_0} P$ est dérivable, alors $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_0} P$ l'est aussi.
2. Montrer que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_0} \phi_1, \ldots, \phi_n$ est dérivable, alors on peut dériver $\Gamma, \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n \vdash_{\mathrm{NK}_0} \bot$.
3. En déduire que la dérivabilité de $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_0} \phi_1, \ldots, \phi_n$ entraîne celle de $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}_0} \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$.