TD4 8 octobre 2012

Logique & Calculabilité

Hubert Comon $\wedge$ David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 0
Trouver des dérivations NK_0 pour les formules suivantes :

1. $A \to B \to A$
2. $((A \to B) \to C) \to B \to C$
3. $(A \to B \to C) \equiv (A \wedge B \to C)$
4. $A \vee B \to B \vee A$
5. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. $((A \to B) \to A) \to A$

Règles admissibles

Une règle $\mathcal{R}$ est dite admissible dans un système de règles d'inférences si l'on peut construire, à partir des règles du système, et de dérivations des prémisses de $\mathcal{R}$, une dérivation de la conclusion de $\mathcal{R}$. Par exemple, la règle du *modus ponens* est admissible dans NK_0 :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Exercice 1
Montrer que les règles suivantes sont admissibles :

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee p \quad \Gamma \vdash \neg p \vee \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \text{ (résolution)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi} \ (\bot E)$$

Remarque : la règle $(\bot E)$ revient à définir $\bot$ comme une disjonction 0-aire, et permet de retrouver les règles de la négation si l'on définit $\neg\phi := \phi \to \bot$.

Exercice 2
Montrer que la règle d'affaiblissement est surperflue, dans le sens où elle est admissible dans le système $\mathrm{NK}_0 \setminus \{\mathrm{Aff}\}$.

Exercice 3
Soit une variable p. Pour une formule Q on note $Q[P/p]$ le résultat de la *substitution* de chaque occurrence de la variable p par la formule P. On étend naturellement cette opération pour une liste de formules et un jugement. Montrer que la règle de substitution est admissible :

$$\frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma[P/p] \vdash Q[P/p]}$$

Exercice 4
Soient P, Q et F des formules, et p une variable propositionnelle. Si $P \vdash Q$ est dérivable, que peut-on dire de $F[P/p] \vdash F[Q/p]$?

Principes de la déduction naturelle

Exercice 5
Un des principes dirigeant la forme des règles en déduction naturelle est la *réduction locale* : on veut pouvoir réduire les introductions immédiatement suivies d'une élimination. Par exemple, pour le connecteur $\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1}{\Gamma \vdash \phi_1} \quad \dfrac{\mathcal{D}_2}{\Gamma \vdash \phi_2}}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\,(\wedge I)}{\Gamma \vdash \phi_1}\,(\wedge E_1) \quad \rightsquigarrow_e \quad \dfrac{\mathcal{D}_1}{\Gamma \vdash \phi_1}$$

Vérifier qu'on peut réduire de même les introductions suivies d'éliminations pour les connecteurs $\vee$, $\rightarrow$, et $\neg$.

Exercice 6
Trouver *toutes* les preuves de $a \rightarrow b \rightarrow a$ qui soient irréductibles pour $\rightsquigarrow_e$. Donner une preuve de cet énoncé qui ne soit pas en forme normale pour $\rightsquigarrow_e$.

Exercice 7
On s'intéresse maintenant à l'*expansion locale* : les instances non-atomiques de la règle axiome sont expansables en utilisant les règles d'introduction et d'élimination. Vérifier ce principe en donnant des preuves de $\phi \to \phi$ pour ϕ étant $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi_1 \to \phi_2$ et $\neg\phi_1$, en n'utilisant la règle axiome que sur les ϕ_i.

Exercice 8
Donner des règles d'introduction et d'élimination, et les réductions et expansions locales correspondantes, pour les connecteurs définis suivants, en n'utilisant aucun autre connecteur logique (mais on s'autorise l'utilisation de la constante $\perp$) :

1. $A \equiv B$ défini comme $(A \to B) \wedge (B \to A)$;
2. $A \oplus B$ défini comme $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

Exercice 9
Montrer que tous les séquents prouvables dans NK_0 admettent des preuves normales pour $\rightsquigarrow_e$. On pourra commencer par se restreindre aux preuves ne comportant que l'implication comme connecteur logique.