Logique & Calculabilité

Hubert Comon $\wedge$ David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 20
Donner une formule qui admet deux formes normales clausales différentes.

Exercice 21
Nous allons encadrer l'explosion de la taille des formules lors de leur mise en forme clausale. Pour $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, on note $\tau(\phi)$ la taille minimale d'une forme clausale de ϕ.

1. Donner une famille de formules ϕ_n tel que $|\phi_n|$ est linéaire en n et $\tau(\phi_n)$ est exponentielle. Plus précisemment, on chercher à avoir :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tau(\phi_n)}{2^{|\phi_n|/2}} > 0$$
2. Montrer que $\tau(\phi) < |\phi| \times 2^{\frac{|\phi|+3}{2}}$ pour tout ϕ. Indice : on considèrera la mesure $w(\phi)$ définie comme valant 0 pour une variable, $w(\neg P) = w(P)$ et $w(\phi * \phi') = 1 + w(\phi) + w(\phi')$ pour tout $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, et on montrera que toute formule ϕ admet une forme clausale ψ telle que $w(\psi) \leq w(\phi) \times 2^{(1+w(\phi))/2}$.

Exercice 24
Construire l'arbre sémantique associé à
$$\{\neg P_2, P_1 \vee P_2 \vee P_3, P_1 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_3\}$$
Cet ensemble de clauses est-il satisfaisable ? Donner un modèle ou une preuve d'incohérence par résolution.

Exercice A
Un club écossais a les règles suivantes :

1. Les membres non écossais doivent porter des chaussettes rouges.
2. Un membre sans kilt ne peut porter de chaussettes rouges.
3. Les membres marriés ne doivent pas sortir le dimanche.
4. Un membre sort le dimanche si et seulement s'il est écossais.
5. Tout membre portant un kilt doit être écossais et marrié.
6. Les membres écossais doivent porter le kilt.

Montrer que ce club ne peut admettre aucun membre, en modélisant en logique propostionnelle et en utilisant la résolution.

Exercice 25
Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de variables propostionnelles, de cardinal n. On appelle 2-clause toute clause contenant au plus deux littéraux. La *taille* d'une preuve est son nombre de noeuds. La *longueur* d'une preuve est le nombre de sous-arbres distincts qu'elle contient. Une preuve est *sans boucle* si elle ne contient pas de branche comprenant deux noeuds différents étiquettés pareil.

1. Montrer que, si E est un ensemble de 2-clauses, toute preuve sans boucle de $E \vdash_R \bot$ est de longueur polynômiale en n.
2. Montrer par contre que la taille peut être exponentielle : donner une preuve de taille exponentielle et sans boucle à partir d'un ensemble de 2-clauses.
3. Donner un algorithme polynômial en n pour décider de la satisfaisabilité d'un ensemble de 2-clauses.

Exercice 30
On considère une restriction de la règle de résolution, où l'une des prémisses au moins est dans E, l'ensemble de clauses initial. Cette stratégie est dite *input*.

1. Montrer que cette stratégie n'est pas réfutationnellement complète en général.
2. Montrer qu'elle est réfutationnellement complète lorsque E est un ensemble de *clauses de Horn*, c'est à dire que chaque clause contient au plus un litéral positif.

Remarques sur les séances précédentes

Un argument plus joli pour montrer l'**exercice 14** : l'ensemble $\{\leftrightarrow, \neg\}$ n'est pas fonctionnellement complet. Il suffit d'observer que toute formule construite avec $\{\leftrightarrow, \neg\}$ satisfait un nombre pair d'interprétations, dès lors qu'on se donne un ensemble de variables $\mathcal{P}$ fini de taille au moins 2.

Une intuition pour l'**exercice 15** ? Pour que E' soit **équivalent** à E, les ψ_i doivent progressivement exclure les interprétations que E ne satisfont pas E : on va faire cela en garantissant que les modèles de $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ coïncident avec ceux de $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. Ensuite, pour obtenir l'**indépendance** on fait en sorte qu'un ψ_i ne soit jamais rendu redondant par un ψ_j pour $j > i$: pour cela, ψ_j doit exclure exactement les interprétations satisfaisant les ϕ_i, $i < j$ mais pas ϕ_j. Autrement dit, ψ_j doit être $\neg(\bigwedge_{i<j} \phi_i \wedge \neg\phi_j)$, ce qui se simplifie en $\bigvee_{i<j} \neg\phi_i \vee \phi_j$. On note aussi, pour ceux qui préfèrent, qu'on peut faire la construction sans les deux hypothèses simplificatrices (cohérence et indépendance "locale") en éliminant les formules redondantes à la volée. Précisons enfin que ces intuitions ne permettent pas de se passer d'une preuve carrée bien rédigée.

On peut renforcer l'**exercice 6, question 2** : il existe un ensemble d'interprétations S tel que pour tout ensemble fini ou infini E, S n'est pas l'ensemble des modèles de E. On peut s'en convaincre par un argument de cardinalité, ou construire un tel S de diverses façons : par exemple, prendre l'ensemble des interprétations sauf celle qui assigne 1 à chaque variable, ou encore, considérer une énumération des formules qui ne sont pas satisfaites dans toutes les interprétations.