Logique & Calculabilité

Hubert Comon ∧ David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 0 (Questions de cours)
On dit qu'une machine M calcule en temps f si pour tout mot w, la machine M s'arrête en moins de $f(|w|)$ étapes de calcul sur l'entrée w. On dit qu'une machine M calcule en espace f si pour tout mot w, et tout calcul de M sur l'entrée w, la tête de lecture/écriture ne dépasse jamais la $f(|w|)$-ème case de la bande — noter que cela n'implique pas la terminaison.

Montrer que les trois problèmes suivants sont décidables. On se contentera de donner une idée d'algorithme, en justifiant.

1. **Données :** une machine M à deux états sur l'alphabet $\Sigma = \{\$, B, 0, 1\}$. **Question :** M termine-t-elle sur l'entrée vide ?
2. **Données :** une machine M, une fonction calculable f telle que M calcule en espace f, et un mot w. **Question :** M termine-t-elle sur l'entrée w ?
3. **Données :** une machine M, une fonction calculable f telle que M calcule en temps f et un mot w. **Question :** M termine-t-elle sur l'entrée w ?

Exercice 1 (Machines de Minsky)
On considère des machines à compteurs à état fini disposant d'un nombre fixé de compteurs entiers pour calculer. Les seules opérations sur les compteurs sont l'incrément, le décrément et le test à zéro.

Formellement, une machine à N compteurs est donnée par une *fonction de transition* $\delta : Q \times \{0,1\}^N \to Q \times \{-1, 0, +1\}^N$ telle que $\delta(q, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (q', d_1, \ldots, d_n)$ et $\alpha_i = 0$ implique $d_i \neq -1$. Une *configuration* de la machine est donnée par un état et les valeurs des N registres. La machine effectue un *mouvement* $(q, k_1, \ldots, k_N) \rightsquigarrow (q', k'_1, \ldots, k'_n)$ si $\delta(q, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) = (q', d_1, \ldots, d_n)$ avec $\alpha_i = 0$ si $k_i = 0$, 1 sinon, et $k'_i = k_i + d_i$.

On distingue enfin un état initial $q_0 \in Q$, ainsi que deux états **accept** et **reject** $\in Q$ et on définit l'acceptation (resp. le rejet) d'un entier n par la machine comme l'existence d'une séquence de mouvements à partir de $(q_0, n, 0, \ldots, 0)$ qui atteint l'état **accept** (resp. **reject**).

1. Soit $k > 1$. Montrer qu'on peut construire une machine de Minsky à deux registres telle que, sur la donnée $n \in \mathbb{N}$, s'arrête dans une configuration où le premier registre contient q et le deuxième r où q et r sont le quotient et le reste de la division de euclidienne n par k.
2. Soit $\Sigma = \{\$, B, a_1, \ldots, a_k\}$. Pour $w \in (\Sigma \setminus \{\$, B\})^*$ on note $c_k(w)$ le nombre dont l'écriture en base $k+1$ est w.

   Montrer que, si L est récursif alors il existe une machine de Minsky à 4 registres qui accepte $\{ \ c_k(w) \mid w \in L \ \}$ et rejette son complémentaire. (En fait, on peut y arriver aussi avec deux registres seulement.)
3. On admet que le problème de l'arrêt est indécidable pour les machines de Turing : il n'existe pas de machine de Turing qui étant donné un code n décide si la machine de Turing $\mathsf{Turing}(n)$ s'arrête sur le ruban vide.

   On considère le problème de l'arrêt pour les machines de Minsky : existe-t-il une machine de Turing qui étant donné un code n, décide si la machine de Minsky $\mathsf{Minsky}(n)$ s'arrête sur l'entrée 0 ?

   Montrer que ce problème est indécidable, en s'appuyant sur la question précédente. Attention : ce n'est pas évident ! quelle construction de machine doit-on admettre (car on ne veut pas la faire en détail) ?

   On dit qu'on a effectué une *réduction du problème de l'arrêt des machines de Turing*.

Exercice 2 (Machines de Minsky à un compteur)
On considère les machines de Minsky à un compteur, et on va voir qu'il n'y a pas besoin de vraiment compter pour analyser leur comportement.

1. On fixe une machine M. On écrit $(q, n) \rightsquigarrow^*_{\geq} (q', n)$ quand la machine peut faire une séquence de mouvements $(q_1, n_1) \rightsquigarrow (q_2, n_2) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow (q_k, n_k)$ avec $q_1 = q$, $q_k = q'$, $n_1 = n = n_k$ et $n_i \geq n$ pour tout i.

   On s'intéresse aux deux propriétés suivantes :

$$A_0(q, q') := (q, 0) \rightsquigarrow^*_{\geq} (q', 0)$$

$$A_1(q, q') := \forall n > 0.\ (q, n) \rightsquigarrow^*_{\geq} (q', n)$$

Axiomatiser ces deux propriétés en logique propositionnelle par une théorie finie composée de clauses de Horn.

2. Conclure qu'on peut décider (en temps polynômial) l'arrêt de M.