λ-Calcul et Logique Informatique

Jean Goubault David Baelde
{goubault,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 — Disjonction dans $\lambda\mathcal{C}$

En logique classique, on peut définir la disjonction à partir de l'implication et du faux : on pose $A \vee B \stackrel{\text{def}}{=} \neg A \Rightarrow \neg B \Rightarrow \bot$, avec comme d'habitude $\neg A \stackrel{\text{def}}{=} A \Rightarrow \bot$.

1. Proposer un encodage des constructeurs ι_1 et ι_2 et du destructeur **case** tels que **case** $(\iota_i u)\ (\lambda x.f_1)\ (\lambda x.\ f_2) \rightarrow^* f_i[u/x]$ dans $\lambda\mathcal{C}$ et les règles suivantes soient admissibles :

$$\frac{\Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash \iota_1 u : A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : B}{\Gamma \vdash \iota_2 u : A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \vee B \quad \Gamma \vdash f : A \Rightarrow C \quad \Gamma \vdash g : B \Rightarrow C}{\Gamma \vdash \textbf{case}\ u\ f\ g : C}$$

2. En utilisant les constructions précédentes, donner un terme clos u tel que $\vdash u : A \vee \neg A$.

   Essayer de décrire le calcul effectué par u, en considérant comment il se comporte quand on fait une étude de cas dessus. Comparer avec les constructeurs de disjonction de la logique intuitionniste.

Exercice 2 — Non-non traduction

On appelle *non-non traduction* d'une formule F la formule $F^{\neg\neg}$ définie comme suit, où A dénote un type atomique et F, G des types arbitraires :

$$F^{\neg\neg} \stackrel{\text{def}}{=} \neg\neg F^\circ \qquad A^\circ \stackrel{\text{def}}{=} A \qquad \bot^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \bot \qquad (F \Rightarrow G)^\circ \stackrel{\text{def}}{=} F^\circ \Rightarrow G^{\neg\neg}$$

1. Montrer par un argument sémantique que G et $F^{\neg\neg}$ sont équivalentes en logique classique.
2. Construire des preuves intuitionnistes des propriétés suivantes :
   – À partir de $u : F$, construire $u^- : \neg\neg F$.
   – À partir de $u : F \Rightarrow G$ et $v : \neg G$, construire $u \bullet v : \neg F$.
   – À partir de $u : \neg\neg\neg F$ construire $u^\circ : \neg F$.
   – À partir de $u : \neg\neg(F \Rightarrow G)$ et $v : \neg\neg F$ construire $u \star v : \neg\neg G$.
3. On sait par complétude sémantique qu'on a des preuves de $F \Rightarrow F^{\neg\neg}$ et $F^{\neg\neg} \Rightarrow F$ dans $\lambda\mathcal{C}$, on veut maintenant les expliciter.

   Construire simultanément, par induction sur F, des termes $u_F : F \Rightarrow F^{\neg\neg}$ et $v_F : F^{\neg\neg} \Rightarrow F$. (Penser à utiliser la question précédente, par exemple si on a $x : F^\circ$ alors $v_F x^- : F$, et si $x : \neg\neg(G^{\neg\neg})$ alors $u_G(x^\circ) : G$.)

Exercice 3 — Preuves classiques en logique intuitionniste
On va voir que la non-non traduction permet de relier en un certain sens les logiques classique et intuitionniste.

On rappelle que $\lambda\nabla$ est la logique intuitionniste avec négation, contenant la règle suivante en plus des règles de la logique minimale :

$$\frac{\Gamma \vdash u : \bot}{\Gamma \vdash \nabla u : F}$$

1. En utilisant l'exercice précédent, construire une preuve classique de F à partir d'une preuve $F^{\neg\neg}$ dans $\lambda\nabla$.
2. Étant donné un $\lambda\mathcal{C}$-terme u tel que $x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n \vdash u : F$, construire un $\lambda\nabla$-terme u^* tel que $x_1 : F_1^\circ, \ldots, x_n : F_n^\circ \vdash u^* : F^{\neg\neg}$. On procèdera par induction sur u.