TD5 19 mars 2013

# $\lambda$-Calcul et Logique Informatique

Jean Goubault David Baelde
{goubault,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

**Exercice 1 — Réduction et typage**
On rappelle la règle de $\eta$-réduction :

$$\lambda x.\ M\ x \to_\eta M \quad \text{si} \quad x \notin \mathrm{FV}(M)$$

1. Montrer que la $\beta$-réduction préserve le typage : $u \to_\beta v$ et $\Gamma \vdash u : T$ implique $\Gamma \vdash v : T$.
2. Montrer que la $\eta$-réduction préserve le typage.
3. Montrer que la $\eta$-expansion ne préserve pas le typage : $u \to_\eta v$ et $\Gamma \vdash v : T$ n'implique pas forcément $\Gamma \vdash u : T$.
4. De même pour la $\beta$-expansion. Quelle propriété importante du typage perd-on forcément dans un système de types pour lequel le typage est préservé par $\beta$-expansion ?

**Exercice 2 — Paires**
On considère le $\lambda$-calcul étendu avec paires et projections :

$$M ::= x \mid \lambda x.\ M \mid M\ N \mid \langle M, N\rangle \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M$$

La réduction est la plus petite congruence contenant $\beta$ et une nouvelle règle :

$$\pi_i\langle M_1, M_2\rangle \ \to\ M_i$$

1. Proposer un système de types simples pour ce calcul.
2. Dans la correspondance de Curry-Howard, comment s'interprète le type de la paire ? Comment s'interprète la nouvelle règle de réduction ?
3. Donner des termes de preuve de $(a \to b \to c) \to (a \times b) \to c$ et de $((a \times b) \to c) \to a \to b \to c$ qui soient inverses l'un de l'autre. On dit alors qu'on a un *isomorphisme de types*. Proposer d'autres isomorphismes de types dans ce système.

**Exercice 3 — Sémantique de Kripke**
Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de variables propositionnelles, dont les éléments seront notés $p, q$. On considère le fragment de la logique intuitionniste donné par

$$F ::= p \mid F_1 \to F_2 \mid \bot$$

et l'on pose $\neg F := F \to \bot$. Le calcul pour ce système, $\lambda\nabla$, est doté de la règle suivante pour la négation :

$$\frac{\Gamma \vdash u : \bot}{\Gamma \vdash \nabla u : F}$$

On peut donner une sémantique de validité à cette logique via la notion de structure de Kripke. Une telle structure est donnée par :

- un ensemble $M$ de mondes ;
- un ordre $\leq$ sur ces mondes, sans chaînes infinies croissantes ;
- une fonction croissante $\phi$ de $(M, \leq)$ dans $(\mathcal{P}(\mathcal{V}), \subseteq)$.

Pour un monde $w$, on définit la relation $w$ *force* $F$, notée $w \Vdash F$ par :

- $w \nVdash \bot$ ;
- pour tout $p \in \mathcal{V}$, $w \Vdash p$ ssi $p \in \phi(w)$ ;
- pour tout $F_1$ et $F_2$, $w \Vdash F_1 \to F_2$ ssi $w' \Vdash F_1$ implique $w' \Vdash F_2$ pour tout $w' \geq w$.

Cette définition de $w \Vdash \bullet$ suppose qu'on a déja défini $w' \Vdash \bullet$ pour $w' \geq w$ : on construit en fait ces relations dans l'ordre, par induction sur la bonne fondation de $\geq$. Enfin, on dit qu'une formule $F$ est *valide* si pour toute structure $(M, \leq, \phi)$ et tout monde $w \in M$ on a $w \Vdash F$.

1. Montrer que $a \to \neg\neg a$ est valide. Donner un terme de $\lambda\nabla$ de ce type.
2. Montrer que si $\cdot \vdash u : F$ est dérivable dans $\lambda\nabla$, alors $F$ est valide.
3. Montrer que $\neg\neg a \to a$ et $((a \to b) \to a) \to a$ ne sont pas valides en logique intuitionniste.