Arbres de Böhm

David Baelde

2 avril 2013

L'énoncé comporte 4 pages et 15 questions. Les questions ne sont pas du tout ordonnées par difficulté croissante, et il y a beaucoup de questions indépendantes : ne vous bloquez pas à la première question difficile, mais faites en un maximum !

Le devoir est à rendre le mardi 16 avril au début de la séance de TD.

Préliminaires

Réduction standard Un terme est en forme normale de tête s'il peut s'écrire $\lambda x_1 \dots \lambda x_n.\ y\ u_1 \dots u_p$, où y est une variable (libre ou liée) et les u_i sont des termes quelconques. On dit alors que y est sa variable de tête. On dit qu'un terme est *résoluble* s'il peut se β-réduire en un terme en forme normale de tête. On a vu en cours comment trouver *la* forme normale de tête d'un terme u résoluble : c'est le premier terme en forme normale de tête atteint à partir de u par la réduction de tête, notée $\to_t$.

Contextes Un contexte est un λ-terme avec un trou, qu'on représentera par un terme spécial $[]$. L'opération de mise en contexte $C[u]$ est définie comme le remplacement *textuel* de ce trou par le terme u : contrairement à la substitution $C[[] := u]$, il est important que ce remplacement provoque la capture des variables libres de u. Par exemple, si $C = (\lambda x.\ [])$ et $C' = (\lambda y.\ [])$ alors $C[x] = (\lambda x.\ x)$ est un terme différent de $C'[x] = (\lambda y.\ x)$.
Un contexte ne contient pas forcément un unique trou : on peut avoir $C[u] = u\ u$ pour tout u (deux trous), et aussi $C[u] = v$ pour tout u (aucun trou). On peut enfin naturellement généraliser la notion de contexte à plusieurs arguments, pour parler de contextes comme $C[u][v] = u\ (u\ v)$ pour tout u et v.

Notations Certains notations sont utilisées pour dénoter des λ-termes classiques dans l'énoncé. On définit ici en plus des notations qui vont seront utiles, merci de les réutiliser.

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f.\ f\ x_1 \dots x_n \qquad \langle\rangle_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x_1 \dots \lambda x_n.\ \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

$$P_i^n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x_1 \dots \lambda x_n.\ x_i \qquad T \stackrel{\text{def}}{=} P_1^2 \qquad F \stackrel{\text{def}}{=} P_2^2 \qquad I \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x.\ x \qquad \Omega \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x.\ x\ x)\ (\lambda x.\ x\ x)$$

On notera de façon compacte les séquences d'abstractions et d'applications à l'aide de vecteurs : on écrira par exemple $\lambda \vec{x} \lambda f.\ f\ \vec{x}$ pour $\lambda x_1 \dots \lambda x_n \lambda f.\ f\ x_1 \dots\ x_n$, en s'assurant que la longueur des vecteurs est clairement donnée par le contexte quand elle est importante.

Pour faciliter le raisonnement sur les réductions de termes en contexte, nous admettrons le résultat suivant : Soient $u_1, \dots, u_n$ des termes clos et C un contexte n-aire tel que $C[\vec{u}] \to_\beta v$. Alors on a :
(1) La réduction est dans C : v peut s'écrire $C'[\vec{u}]$ tel que pour tous termes $\vec{t}$ clos on a $C[\vec{t}] \to_\beta C'[\vec{t}]$.
ou (2) La réduction est dans un certain u_i : $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i]$ pour tout $\vec{t}$, et $v = C'[\vec{u}, u']$ avec $u_i \to_\beta u'$.
ou (3) La réduction implique C et un u_i : $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i\ w]$ pour tout $\vec{t}$, $u_i = (\lambda x.\ u')$ et $v = C'[\vec{u}, u'[x := w]]$.

1 Équivalence comportementale

On dit que deux termes u et v sont *séparables* s'il existe un contexte C tel que $C[u] \to_\beta^* T$ et $C[v] \to_\beta^* F$.

Question 1
Montrer que la séparabilité est une relation irréflexive et symétrique.

Question 2
Montrer que $(\lambda f \lambda x.\ f\ x)$ et $(\lambda f \lambda x.\ f\ (f\ x))$ sont séparables.

Question 3
Montrer que si $C[\Omega] \to_\beta^* t$ avec t en forme normale, alors pour tout u clos on a aussi $C[u] \to_\beta^* t$.
En déduire que I et Ω sont inséparables.

On écrit $u \downarrow_\beta$ quand u normalise faiblement pour la β-réduction, *i.e.*, $u \to_\beta^* t$ avec t sans β-redex. On dit que u et v sont en *équivalence comportementale*, noté $u \approx v$, si pour tout contexte C on a $C[u] \downarrow_\beta$ ssi $C[v] \downarrow_\beta$. De façon évidente, $\approx$ est une relation d'équivalence et une congruence, et deux termes α-équivalents sont en équivalence comportementale.

Question 4

1. Montrer que $\to_\beta$ est contenue dans $\approx$.
2. Soient u, v tels que $u \to_\beta^* \lambda x.\ v$. Montrer $u \approx (\lambda y.\ u\ y)$ pour $y \notin \mathrm{FV}(u)$.

On a en fait $\to_\eta \subseteq \approx$ en général, mais on ne va pas le montrer ici.

Question 5

1. Montrer que si v n'est pas résoluble alors, pour toute substitution θ, $v\theta$ n'est pas résoluble.
2. Démontrer $u \not\approx v$ pour u résoluble et v non résoluble.

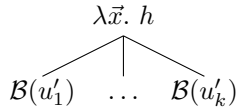
Question 6
On montre finalement que l'équivalence comportementale est strictement incluse dans l'inséparabilité :

1. Donner deux termes t et t' inséparables mais tels que $t \not\approx t'$.
2. Montrer que si u et v sont séparables alors ils ne sont pas en équivalence comportementale.

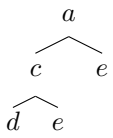
2 Arbres de Böhm

Un arbre de Böhm est un arbre infini à branchement fini, dont les noeuds peuvent être
– soit un noeud étiqueté par Ω, auquel cas le noeud n'a aucun fils ;
– soit un noeud étiqueté par $\lambda x_1 \dots \lambda x_n.\ h$ où h est une variable, auquel cas le noeud a un nombre quelconque k de fils. On appelle k l'*arité* du noeud, et $n - k$ est son *type*. (Attention, rien ne force une même variable h à toujours apparaître avec le même type.)

On associe à tout λ-terme u un arbre de Böhm $\mathcal{B}(u)$: si u n'admet pas de forme normale de tête alors $\mathcal{B}(u) = \Omega$; sinon, si $\lambda \vec{x}.\ h\ u'_1 \dots\ u'_k$ est la forme normale de tête de u, alors $\mathcal{B}(u)$ est comme montré ci-contre — on pourra noter un tel arbre $\lambda \vec{x}.\ h\ \mathcal{B}(u'_1) \dots \mathcal{B}(u'_k)$.



Un arbre de Böhm doit être vu comme un λ-terme infini en forme normale, avec la construction spéciale Ω en plus. Les notions de variable libre, liée et de renommage sont étendues naturellement aux arbres de Böhm. Dans la suite, les arbres de Böhm seront identifiés modulo renommage des variables.



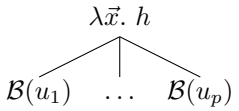
Dans un arbre, on désigne un noeud par sa *position*, qui est une liste d'entier : la liste vide ϵ désigne la racine, et la liste $k::\ell$ désigne la position ℓ dans le $k^{\text{ème}}$ sous-arbre de la racine, quand celui-ci existe. Pour un arbre donné, une position est dite *valide* ssi elle désigne bien un noeud ou une feuille. Par exemple, dans l'arbre ci-contre, les seules positions valides sont $[1;1]$, $[1;2]$, $[2]$ et tous leurs préfixes. Enfin, l'ensemble des préfixes d'une position valide définit un *chemin* dans un arbre.

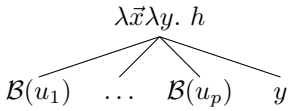
Question 7
Calculer les arbres de Böhm des termes suivants, où x, y et f sont des variables distinctes :

$$u_1 := (\lambda x.\ x\ x) \qquad u_2 := (u_1\ u_1)$$
$$u_3 := (\lambda f.\ f\ (\lambda y.\ u_2)) \quad u_4 := \big((\lambda x.\ f\ (x\ x))\ (\lambda x.\ f\ (x\ x))\big)$$

Question 8
Soit un arbre de Böhm T fini. Construire un terme $\mathcal{B}^{-1}(T)$ dont l'arbre de Böhm soit T.

Notre but dans ce devoir est de caractériser $u \approx v$ simplement en comparant $\mathcal{B}(u)$ et $\mathcal{B}(v)$. On a vu que $\to_\eta$ est contenue dans $\approx$, il va donc falloir que l'on déclare équivalents les arbres de Böhm de deux termes η-équivalents. On a par exemple $(\lambda\vec{x}\lambda y.\ h\ \vec{u}\ y) \to_\eta (\lambda\vec{x}.\ h\ \vec{u})$, ce qui veut dire qu'on doit considérer comme équivalents les deux arbres suivants [1] :

$\mathcal{B}(\lambda\vec{x}.\ h\ \vec{u}) =$ 

$\mathcal{B}(\lambda\vec{x}\lambda y.\ h\ \vec{u}\ y) =$ 

On définit la Böhm-équivalence jusqu'à la position ℓ, notée $u \sim_\ell v$, par deux conditions :

1. Les noeuds racines de $\mathcal{B}(u)$ et $\mathcal{B}(v)$ sont compatibles, c'est à dire qu'ils sont tous deux Ω, ou deux formes normales de tête avec la même variable de tête et le même type.
2. Si $\ell = k::\ell'$ alors les formes normales de tête de u et v sont respectivement (modulo renommage) $\lambda x_1 \dots \lambda x_n.\ h\ u_1 \dots u_p$ et $\lambda x_1 \dots \lambda x_m.\ h'\ v_1 \dots v_q$ et on a un des cas suivants [2] :
   - $k \le p$ et $k \le q$ et $u_k \sim_{\ell'} v_k$;
   - $p < k \le q$ et $x_{n+(k-p)} \sim_{\ell'} v_k$;
   - $q < k \le p$ et $u_k \sim_{\ell'} x_{m+(k-q)}$;
   - $k > p$ et $k > q$.

On définit enfin $u \sim v$ ssi $u \sim_\ell v$ pour tout ℓ. On notera que $u \sim_\ell v$ ssi $u \sim_{\ell'} v$ pour ℓ' plus grand préfixe de ℓ qui soit valide dans $\mathcal{B}(u)$ ou dans $\mathcal{B}(v)$. En effet, l'équivalence devient trivialement vraie dès lors que la position "sort" des deux arbres.

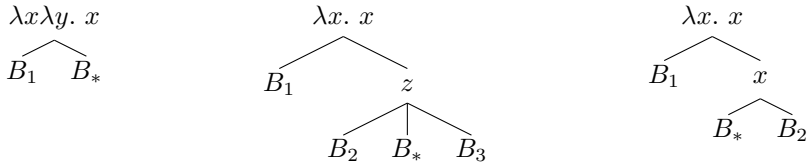
Question 9
Soient u et v résolubles tels que $u \not\sim_\epsilon v$. Démontrer que u et v sont séparables, en traitant d'abord le cas où les variables de tête sont différentes puis le cas où elles sont égales mais de types différents.

3 Böhm out

Dans cette partie nous allons construire l'opération de *Böhm out* qui permet d'extraire des sous-arbres de l'arbre de Böhm d'un terme. Étant donné deux termes dont les arbres de Böhm ne sont pas équivalents, cela va nous permettre de faire remonter leur différence à la racine, et montrer ainsi que les termes ne sont pas en équivalence comportementale.

1. On pourrait être tenté de dire que deux arbres sont équivalents quand ils sont égaux modulo un nombre fini d'expansions de la forme montrée ici. Cela ne suffit pas, car l'effet d'une η-expansion sur un terme (par exemple, u_4) peut correspondre à un nombre infini d'expansions sur son arbre de Böhm. La définition de $\sim$ donnée dans le devoir permet d'éviter d'avoir à considérer ces expansions infinies.
2. On notera que les indices sont bien définis dans chaque cas grâce à la première condition qui impose ($h = h'$ et) $p - n = q - m$.

Question 10
On considère les arbres de Böhm suivants, où les B_i et B_* sont quelconques et x, y et z sont des variables distinctes :



Pour chacun de ces arbres T, en supposant qu'on a un terme u tel que $\mathcal{B}(u) = T$, donner un contexte C tel que $\mathcal{B}(C[u]) = B_*\theta$ pour une certaine substitution θ que l'on précisera.
Indice pour le troisième arbre : utiliser un constructeur de couples.

Au lieu de travailler directement avec des contextes, on introduit une notion plus pratique : une *transformation élémentaire* est soit une fonction $u \mapsto (u\ x)$ où x est une variable, soit $u \mapsto u[x := v]$, et une *transformation* est une composition de transformations élémentaires. Les transformations seront notées π, leur composition sera simplement écrite comme une juxtaposition, et de même pour l'application d'une transformation à un terme : $u\pi = \pi(u)$ et $u\pi\pi' = \pi'(\pi(u)) = (\pi\pi')(u)$.

Question 11
Montrer que toute transformation π correspond à un contexte C_π, tel que $u\pi =_\beta C_\pi[u]$ pour tout u.

Question 12
Soient deux termes u et v et une variable $x \notin \mathrm{FV}(u) \cup \mathrm{FV}(v)$. Prouver l'équivalence $u \sim_\ell v$ ssi $u\ x \sim_\ell v\ x$.

Question 13

1. Soit un terme u (résoluble ou pas) et un entier a strictement supérieur à l'arité de la racine de $\mathcal{B}(u)$. Donner, en fonction de l'étiquette de la racine de $\mathcal{B}(u)$, l'étiquette du noeud racine de $\mathcal{B}(u[x := \langle\rangle_a])$. Dans le cas d'une étiquette différente de Ω, on précisera comment l'arité et le type du noeud évoluent.
2. Soient u et v tels que $u \not\sim_\epsilon v$, et a un entier strictement supérieur aux arités des racines de $\mathcal{B}(u)$ et $\mathcal{B}(v)$. Montrer qu'on a encore $u[x := \langle\rangle_a] \not\sim_\epsilon v[x := \langle\rangle_a]$.
3. Soient deux termes u et v, une position ℓ, et un entier a strictement supérieur aux arités de tous les noeuds de $\mathcal{B}(u)$ et $\mathcal{B}(v)$ sur le chemin ℓ.
   Prouver que pour tout préfixe ℓ' de ℓ, $u \not\sim_{\ell'} v$ entraîne $u[x := \langle\rangle_a] \not\sim_{\ell'} v[x := \langle\rangle_a]$.

Question 14
Étant donnés u et v résolubles tels que $u \not\sim_{k::\ell} v$, construire π tel que $u\pi \not\sim_\ell v\pi$.

Question 15
Conclure que $u \approx v$ implique $u \sim v$.

En fait, on a coïncidence de $\approx$ et $\sim$, mais il n'est pas question de le montrer. On pourrait aussi reformuler la question 14 pour coller à la "vraie" opération de Böhm out, qui dit que pour tout ℓ il existe π tel que $\mathcal{B}(u\pi)$ soit le sous-arbre de $\mathcal{B}(u)$ à la position ℓ, modulo instantiation des variables de tête libres apparaissant sur le chemin ℓ.