Correction du DM
Arbres de Böhm

David Baelde

23 avril 2013

1 Équivalences

Question 1
La symétrie s'obtient en ajoutant une négation au contexte séparateur : si C envoie u sur T et v sur F, alors $C'[t] = \lambda x\lambda y.\ C[t]\ y\ x$ envoie u sur $\lambda x\lambda y.\ T\ y\ x = F$ et vice versa. L'irréflexivité est une conséquence de la confluence : si on a $C[u] \to_\beta^* T$ et $C[u] \to_\beta^* F$ alors il doit exister v tel que $F \to_\beta^* v$ et $T \to_\beta^* v$, ce qui est absurde car T et F sont des formes normales distinctes.

Question 2
Considérons $C[k] = (k\ T\ n)$ où n est la négation $\lambda b\lambda x\lambda y.\ b\ y\ x$. Si k est un entier de Church alors $C[k] \to_\beta^* T$ ssi l'entier est pair, et donc le codage de 1 va sur F tandis que le codage de 2 va sur T.

Question 3
On fixe un terme u clos, et on montre la propriété demandée par induction sur la longueur de la réduction. Si on a $C[\Omega] = t$, alors comme Ω ne peut apparaître dans une forme normale on a bien $C[u] = t$ pour tout u. Sinon $C[\Omega] \to_\beta t' \to_\beta^* t$, et on a vu qu'il y a trois cas à considérer car Ω est clos. Dans le premier cas $t' = C'[\Omega]$ et $C[u] \to_\beta C'[u]$, on conclut par hypothèse d'induction avec C' comme nouveau contexte. Dans le second cas c'est Ω qui se réduit, on a alors $t' = C[\Omega]$, on conclut par hypothèse d'induction avec le même C. Le dernier cas est trivial car Ω ne peut pas s'écrire $\lambda x.\ u'$.
Si I et Ω étaient séparables, on aurait $C[\Omega] \to_\beta^* T$ et $C[I] \to_\beta^* F$. On vient de montrer qu'on aurait alors aussi $C[I] \to_\beta^* T$, ce qui contredit l'irréflexivité de la séparabilité.

Question 4

1. Si $u \to_\beta v$, on montre $u \approx v$. Soit C tel que $C[u] \to_\beta^* t$ avec t forme normale. On a $C[u] \to_\beta^* C[v]$ (en faisant autant de $\to_\beta$ qu'il y a d'occurrences de x dans $C[x]$) et on conclut par confluence que $C[v] \to_\beta^* t$ et donc $C[v] \downarrow_\beta$. Dans l'autre sens c'est immédiat : si on a $C[v] \downarrow_\beta$, on observe que $C[u] \to_\beta^* C[v]$ et donc $C[u] \downarrow_\beta$.
2. Soit u tel que $u \to_\beta^* \lambda x.\ v$. On montre $u \approx \lambda y.\ u\ y$ pour $y \notin \mathrm{FV}(u)$. Par le premier point et le fait que $\approx$ est une relation d'équivalence, on a $u \approx \lambda x.\ v$. On a d'autre part $\lambda y.\ u\ y \to_\beta^* \lambda y.\ (\lambda x.\ v)\ y \to_\beta \lambda y.\ v[x := y]$, et donc $\lambda y.\ u\ y \approx \lambda y.\ v[x := y]$. On conclut par le fait que $\approx$ contient l'α-équivalence.

Question 5

1. On peut d'abord noter que $t \to_\beta t'$ entraîne $t\theta \to_\beta t'\theta$, ce qui se démontre par une simple induction sur t. On observe ensuite que $\to_t$ est aussi stable par substitution : si $u \to_t v$ alors $u\theta \to_t v\theta$. En effet, s'il y a un redex de tête il est préservé par substitution et $\to_t$ (sous-cas de $\to_\beta$) se comporte bien par rapport à la substitution. On peut alors conclure que si u n'est pas résoluble, c'est à dire s'il existe une réduction infinie $u = u_0 \to_t u_1 \to_t \ldots$, alors $u_0\theta \to_t u_1\theta \to_t \ldots$, donc $u\theta$ n'est pas résoluble.
2. Si u est résoluble, alors il existe un contexte qui normalise quand on l'applique à u mais pas à w non résoluble : pour $u \to_t^* \lambda\vec{x}.\ y\ \vec{v}$, on prend le contexte défini par $C[t] = (\lambda y.\ t\ \vec{x})\ P$ pour tout t, avec $P := (\lambda z_1 \ldots \lambda z_{\vec{v}}.\ I)$. On a alors $C[u] \to_\beta^* P\vec{v\theta} \to_\beta I$ par construction. Par contre $C[w] \to_t (w\ \vec{x})[y := P]$ où $w[y := P]$ (toujours non résoluble) est en tête, ce qui fait que le terme n'est pas résoluble.

Question 6
Le second point est évident : on a déja vu que Ω et I sont inséparables, mais on a trivialement $\Omega \not\approx I$.
Montrons que la séparabilité implique la non-équivalence comportementale. Étant donnés $C[u] \to_\beta^* T$ et $C[v] \to_\beta^* F$, on pose $C'[x] = C[x]\ I\ \Omega$. On a clairement $C'[u] \to_\beta^* I \downarrow_\beta$, et on va montrer $C'[v] \not\downarrow_\beta$. Pour cela il suffit de montrer que le terme n'est pas résoluble. On a $C[v] \to_\beta^* F$ et donc aussi $C[v] \to_t^* F$. Cette réduction de tête se décompose en trois parties : $C[v] \to_t^* \lambda x.\ t_1 \to_t^* \lambda x.\lambda y.\ t_2 \to_t^* \lambda x.\lambda y.\ y$, où la première séquence de réductions a lieu tant que le terme ne commence par aucune abstraction et la seconde tant qu'il n'y a qu'une abstraction. On a alors $C[v]\ I\ \Omega \to_t^* (\lambda x.\ t_1)\ I\ \Omega \to_t t_1[x := I]\ \Omega \to_t^* (\lambda y.\ t_2[x := I])\ \Omega \to_t t_2[x := I, y := \Omega] \to_t^* y[x := I, y := \Omega] = \Omega$. Comme Ω n'est pas résoluble, $C[v]\ I\ \Omega$ non plus.

2 Arbres de Böhm

Question 7

$$\mathcal{B}(u_1) = \begin{array}{c}\lambda x.\ x\\ |\\ x\end{array} \qquad \mathcal{B}(u_2) = \Omega \qquad \mathcal{B}(u_3) = \begin{array}{c}\lambda f.\ f\\ |\\ \Omega\end{array} \qquad \mathcal{B}(u_4) = \begin{array}{c} f\\ |\\ \mathcal{B}(u_4)\end{array}$$

Question 8
On traduit l'arbre fini par induction sur sa profondeur : on envoie Ω sur un terme non résoluble (par exemple, Ω) et on envoie l'arbre $\lambda\vec{x}.\ y\ T_1 \dots\ T_p$ vers le terme $\lambda\vec{x}.\ y\ \mathcal{B}^{-1}(T_1) \dots\ \mathcal{B}^{-1}(T_p)$. C'est correct par construction : on a immédiatemment $\mathcal{B}(\mathcal{B}^{-1}(T)) = T$ par induction sur T.

Question 9
Sans perte de généralité on suppose que u et v sont en forme normale de tête :

$$u = \lambda x_1 \dots \lambda x_n.\ y\ u'_1 \dots\ u'_p \qquad v = \lambda x_1 \dots \lambda x_m.\ y'\ v'_1 \dots\ v'_q$$

Il y a plusieurs cas à considérer :

1. Supposons d'abord $y \neq y'$. On traite le cas $m \leq n$, l'autre est symétrique. On prend [1]

   $$\pi := x_1 \dots x_n\ [y := A]\ [y' := A']\ T\ F$$

   pour des termes A et A' qu'on va déterminer ensuite. On a

   $$u\pi \to_\beta^* A\ u'_1 \dots\ u'_p\ T\ F \quad \text{et} \quad v\pi \to_\beta^* A'\ v'_1 \dots\ v'_q\ x_{m+1} \dots\ x_n\ T\ F$$

   Si l'on choisit $A := P_{p+1}^{p+2}$ et $A' := P_{q+n-m+2}^{q+n-m+2}$ alors $u\pi \to_\beta^* T$ et $v\pi \to_\beta^* F$, on a séparé nos deux termes.
2. Supposons maintenant $y = y'$ mais les types diffèrent. On traite le cas $m-q < n-p$, l'autre est symétrique.
   - Si $m \leq n$, on pose $k := (n-p) - (m-q) > 0$, on se donne des variables fraîches $z_1, \dots, z_{k+1}$ et on prend

     $$\pi := x_1 \dots x_n [y := A] z_1 \dots z_{k+1}$$

     pour un A qu'on va déterminer ensuite. On a

     $$u\pi \to_\beta^* A\ u'_1 \dots\ u'_p\ z_1 \dots\ z_k\ z_{k+1} \quad \text{et} \quad v\pi \to_\beta^* A\ v'_1 \dots\ v'_q\ x_{m+1} \dots\ x_n\ z_1 \dots\ z_k\ z_{k+1}$$

     Dans le premier terme, A a $(p+k+1)$ arguments, dans le second il en a $q+n-m+k+1$, un nombre strictement supérieur. Comme $p+k = q+n-m$, le $(p+k+1)^{\text{ème}}$ argument de A est respectivement z_{k+1} dans le réduit de $u\pi$ et z_1 dans le réduit de $v\pi$. On choisit $A := P_{p+k+1}^{p+k+1}$ et on a $u\pi \to_\beta^* z_{k+1}$ et $v\pi \to_\beta^* z_1 \dots\ z_{k+1}$. En complétant la transformation, on va pouvoir choisir la valeur de ces variables fraîches : on prend finalement

     $$\pi' := \pi[z_1 := \lambda x_1 \dots \lambda x_k.\ T][z_{k+1} := F]$$

     qui envoie u sur F et v sur T.
   - Si $m > n$, cela se passe en fait de la même façon. On observe ci-dessus que le prefixe de taille $p = q+(n-m)$ ne joue aucun rôle dans la réduction. On peut alors généraliser en appliquant $x_1 \dots x_{\max(m,n)}$, on obtiendra un préfixe passif de $\max(p,q) = \min(p,q) + |n-m|$, qu'on fera suivra de $z_1 \dots z_{k+1}$ avec $k := |(n-p) - (m-q)|$.

1. Désolé, j'utilise les π définis dans la partie suivante, c'est trop pratique.

3 Böhm out

Question 10
Pour le premier arbre, on extrait B_* avec le contexte $C_1[u] = u\ P_2^2\ y$. Plus précisement, on obtient $\mathcal{B}(t_*[x := P_2^2])$ où $B_* = \mathcal{B}(t_*)$. On utilise ensuite $C_2[u] = (\lambda z.\ u\ P_2^2)\ P_2^3$ qui nous donne B_* modulo la substitution $[x := P_2^2, z := P_2^3]$. Pour le dernier arbre on pose $C[u] = (u\ \langle\rangle_2)\ P_2^2\ P_1^2$ et on obtient B_* modulo $[x := \langle\rangle_2]$.
On vérifie la dernière solution. Sans perdre de généralité, on peut considérer un terme déja suffisamment normalisé, sinon il se normalisera comme il faut sous le contexte. On pose donc $u := \lambda x.\ x\ t_1\ (x\ t_*\ t_2)$. On a alors $C[u] \to_t \langle t_1\theta, \langle t_*\theta, t_2\theta\rangle\rangle\ P_2^2\ P_1^2 \to_t^* \langle t_*\theta, t_2\theta\rangle\ P_1^2 \to_t^* t_*\theta$ et donc $\mathcal{B}(C[u]) = \mathcal{B}(t_*\theta)$.

Question 11
On procède par induction sur la transformation π : si $\pi = \mathrm{id}$ alors $C_\pi[u] = u$; si $\pi = x\pi'$ alors $C_\pi[u] = C_{\pi'}[u\ x]$; si $\pi = [x := v]\pi'$ alors $C_\pi[u] = C_{\pi'}[(\lambda x.\ u)\ v]$. On vérifie aisément, encore par induction sur π, que $C_\pi[u] = u\pi$.

Question 12
On remarque d'abord que u est résoluble ssi $u\ x$ est résoluble. Si u diverge pour $\to_t$ alors $u\ x$ aussi, par définition de la réduction de tête. Si u est résoluble avec une forme normale de tête t qui ne soit pas une abstraction, alors $u\ x \to_t^* t\ x$ qui est encore une forme normale de tête. Enfin si $t = \lambda y.\ t'$ alors $u \to_t^* t'[y := x]$ qui est une forme normale de tête.
Considérons maintenant u résoluble avec pour forme normale de tête $\lambda x_1 \dots \lambda x_n.\ y\ u'_1 \dots\ u'_p$. Si $n = 0$ alors $u\ x \to_t^* y\ u'_1 \dots\ u'_p\ x$. Sinon on se réduit vers $\lambda x_2 \dots \lambda x_n.\ y\theta\ u'_1\theta \dots\ u'_p\theta$ où $\theta = [x_1 := x]$. Comme x est fraîche il s'agit en fait d'un renommage, et il s'ensuit que les sous-arbres de Böhm sont préservés à l'identique (plus précisemment ils sont juste renommés de la même façon). On a donc seulement supprimé une abstraction sur le noeud racine.
On démontre $u \sim_\ell v$ ssi $u\ x \sim_\ell v\ x$ en raisonnant par cas sur ℓ.
- Pour ϵ : Si $\mathcal{B}(u) = \Omega$ alors $\mathcal{B}(u\ x) = \Omega$, et il faut montrer $\mathcal{B}(v) = \Omega$ ssi $\mathcal{B}(v\ x) = \Omega$, c'est déja fait. Si u est résoluble, alors v l'est ssi $v\ x$ l'est, et les types sont inchangés par l'application de x. Il reste à traiter l'égalité des variables si tête : si elles étaient égales, le renommage de x_1 en x les laisse égales, et si elles étaient différentes alors elles restent différentes après renommage car x est supposé frais.
- Pour $k{::}\ell'$ on fait le même argument pour la racine, ensuite cela dépend de k : si on va regarder un sous-arbre initialement présent dans les deux arbres, ils ont seulement été renommés et l'(in)équivalence est donc préservée ; si on regarde deux sous-arbres x ajoutés par l'application, ils sont trivialement équivalents, ils l'étaient avant ; si x n'est ajouté que d'un côté alors il sera comparé avec la première variable liée renommée en x, c'est équivalent comme avant ; enfin quand k est plus grand, c'est équivalent par définition et ça l'était déja avant.

Question 13
On étudie l'effet du remplacement de la variable libre x par un constructeur de paire d'arité a assez grande.

1. Considérons d'abord donc l'effet de $\theta := [x := \langle\rangle_a]$ sur la racine d'un arbre de Böhm :
   - Si le terme n'est pas résoluble, il le reste car $\to_t$ est préservée par substitution.
   - Si $u \to_t^* \lambda\vec{y}.\ z\ u_1 \dots u_p$ avec $z \neq x$ alors $u\theta \to_t^* \lambda\vec{y}.\ z\ u_1\theta \dots u_p\theta$: la substitution n'a pas d'effet sur le noeud et est simplement propagée aux sous-arbres.
   - Si $u \to_t^* \lambda y_1 \lambda y_n.\ x\ u_1 \dots u_p$ alors $u\theta \to_t^* \lambda y_1 \lambda y_n.\ \langle\rangle_a\ u_1\theta \dots u_p\theta$ et comme $p < a$ on peut encore réduire jusque
   $$\lambda y_1 \dots \lambda y_n \lambda y_{p+1} \dots \lambda y_a \lambda f.\ f\ u_1\theta \dots u_p\theta\ y_{p+1} \dots y_a$$
   La variable de tête est devenue la $(n + (a - p) + 1)^{\text{ème}}$ variable liée, le type augmente de 1 ($(n-p)+1 = (n + (a-p) + 1) - a$) et la substitution est propagée aux sous-arbres.
2. Vérifions maintenant que la Böhm-inéquivalence est préservée à la racine. Si on a un terme résoluble, et un autre non résoluble, on a déja montré que la situation reste la même. Si on a deux termes résolubles de types différents, les types restent différents. Il reste à montrer que deux variables de tête différentes restent différentes, le cas non-trivial étant celui de deux termes résolubles, l'un ayant pour variable de tête x (qui va devenir f) et l'autre une variable liée (qui pourrait être confondue avec f). Supposons que u avait x pour variable de tête, de telle sorte que $u\theta$ a pour forme normale de tête
$$\lambda y_1 \dots \lambda y_n \lambda y_{p+1} \dots \lambda y_a \lambda f.\ f\ u_1\theta \dots u_p\theta\ y_{p+1} \dots y_a$$

et que v serait déja, avant (et donc après) substitution, de la même forme

$$\lambda y_1 \dots \lambda y_n \lambda y_{p+1} \dots \lambda y_a \lambda f \lambda \vec{z}.\ f\ \dots$$

On voit que v doit avoir au moins autant d'abstractions que $u\theta$, sinon la variable de tête n'est pas la même variable liée. Mais pour que f ait le même type dans $u\theta$ et $v\theta$ il faut donc qu'on ait au moins a applications dans $v\theta$, c'est à dire dans v, ce qui est exclu par hypothèse. Il n'y a donc pas de confusion possible.

3. Finalement, si les arités de tous les noeuds de $\mathcal{B}(u)$ et $\mathcal{B}(v)$ sur le chemin ℓ sont inférieures strictement à a alors pour tout $\ell' \preceq \ell$, $u \not\sim_{\ell'} v$ implique $u[x := \langle\rangle_a] \not\sim_{\ell'} v[x := \langle\rangle_a]$. On procède par induction sur ℓ. On a vu que la Böhm-inéquivalence est préservée à la racine. Dans le cas où $\ell = k{::}\ell_t$, il reste à vérifier les préfixes non vides $k{::}\ell'_t$ (avec $\ell'_t \preceq \ell_t$) dans le cas où les racines sont équivalentes avant et après instantiation : l'hypothèse $u \not\sim_{k::\ell'_t} v$ devient $u_k \not\sim_{\ell'_t} v_k$, et par hypothèse d'induction sur ℓ_t (l'hypothèse sur a est préservée) on obtient alors $u_k[x := \langle\rangle_a] \not\sim_{\ell'_t} v_k[x := \langle\rangle_a]$, et comme ces termes correspondent bien aux $k^{\text{èmes}}$ sous-arbres de l'arbre de Böhm après substitution, on peut conclure $u[x := \langle\rangle_a] \not\sim_{k::\ell'_t} v[x := \langle\rangle_a]$.

Question 14

Étant donnés u et v résolubles tels que $u \not\sim_{k::\ell} v$, on construit π tel que $u\pi \not\sim_\ell v\pi$.
On peut supposer $u \sim_\epsilon v$, sinon le résultat est trivial. On a donc u et v qui ont des hnf respectives

$$\lambda x_1 \dots \lambda x_n.\ y\ u_1 \dots u_p \qquad \text{et} \qquad \lambda x_1 \dots \lambda x_m.\ y'\ v_1 \dots v_q$$

avec $y = y'$ et $n - p = m - q$. Par symétrie, on peut supposer $n \leq m$, et donc $p \leq q$. Comme $u \sim_\epsilon v$ mais $u \not\sim_{k::\ell} v$, on a forcément $k \leq q$.
Soit a un majorant strict des arités de $\mathcal{B}(u)$ et $\mathcal{B}(v)$ sur le chemin $k{::}\ell$. Par les résultats précédents, on peut appliquer des variables fraîches et substituer $\langle\rangle_a$ et préserver l'inéquivalence. On a donc $u\pi_1 \not\sim_{k::\ell} v\pi_1$ avec

$$\pi_1 := x_1 \dots x_m\ [y := \langle\rangle_a]\ x_{q+1} \dots x_a\ f$$

En posant $u'_i = u_i[y := \langle\rangle_a]$ et $v'_i := v_i[y := \langle\rangle_a]$, l'effet de π_1 sur nos deux termes est :

$$u\pi_1 \to_t^* f\ u'_1 \dots u'_p\ x_{n+1} \dots x_m\ x_{q+1} \dots x_a \quad \text{et} \quad v\pi_1 \to_t^* f\ v'_1 \dots v'_q\ x_{q+1} \dots x_a$$

Le nombre d'application dans le second terme est $a = q+(a-q)$. Dans le premier, il y en a $p+(m-n)+(a-q) = q+(a-q) = a$. De plus, la variable f n'apparaît nulle part excepté en tête des termes. On peut donc la substituer par une projection, et obtenir ainsi exactement les $k^{\text{ème}}$ sous-arbres de Böhm [2] : on pose $\pi := \pi_1\ [f := \mathbf{P}^a_k]$ et on a $\mathcal{B}(u\pi) = \mathcal{B}(u\pi_1)_k$, $\mathcal{B}(v\pi) = \mathcal{B}(v\pi_1)_k$ et l'inéquivalence $u\pi_1 \not\sim_{k::\ell} v\pi_1$ devient $u\pi \not\sim_\ell v\pi$.

Question 15

On montre la contraposée. On suppose $u \not\sim v$, on a donc $u \not\sim_\ell v$ pour une certaine position ℓ, qu'on prend minimale. On procède par induction sur ℓ. Si $\ell = \epsilon$, il y a deux cas : soit un seul des deux termes est résoluble, et on a vu qu'ils sont alors distingués par $\approx$, soit les deux sont résolubles mais leurs noeuds racines ne sont pas compatibles, et on a vu qu'on peut alors carrément les séparer. Si $\ell = k{::}\ell'$, on a $u \sim_\epsilon v$, u et v résolubles, mais les $k^{\text{èmes}}$ sous-arbres diffèrent : on applique alors la question précédente pour "remonter" la différence et on conclut par hypothèse d'induction.

2. On pourra noter que les sous-arbres extraits par la projections correspondent à des sous-arbres des termes initiaux u et v modulo la substitution de y par $\langle\rangle_a$ et le fait qu'on puisse extraire d'un côté un sous-arbre "virtuel" dans le cas où $p < k \leq q$.