

# Model-checking robuste des automates temporisés *via* les machines à canaux

Ocan Sankur<sup>1 2</sup>

14 août 2010

Encadrants : Patricia Bouyer-Decitre<sup>2</sup> et Nicolas Markey<sup>2</sup>

## Résumé

Les automates temporisés (AT) constituent un modèle largement utilisé dans la vérification des systèmes temporisés. Cependant, la sémantique classique de ce modèle n'est pas conservée à l'implémentation. Pour contourner ce problème, des algorithmes de *model-checking robuste* des propriétés linéaires ont été proposés pour une certaine classe d'automates temporisés. Le model-checking robuste consiste à déterminer si l'implémentation d'un modèle donné vérifie sa spécification. Notre résultat principal est que pour les propriétés de co-Büchi, le problème du model-checking robuste se réduit au problème du model-checking classique, tout en conservant la complexité du cas classique (PSPACE). Comme un deuxième résultat, on propose un algorithme de model-checking robuste basé sur l'automate des régions. Nos deux résultats sont établis pour les ATs généraux. Pour motiver le traitement du cas général, on donne une classe de systèmes temporisés qui ne peuvent pas être modélisés par des ATs sous la restriction des travaux précédents. Nos techniques de preuves sont exclusivement basées sur les machines à canaux, introduites récemment dans ce contexte.

## 1 Introduction

**Vérification formelle des systèmes temps-réel** La vérification formelle consiste à vérifier que le modèle d'un système étudié vérifie sa spécification, exprimée par une formule logique. Depuis les premiers travaux il y a trente ans, la vérification formelle est devenue un domaine de recherche très actif en informatique. L'importance de considérer le temps-réel dans les modèles a été comprise rapidement, et les automates temporisés [1] sont devenus un modèle important pour l'étude des systèmes temporisés. La théorie des automates temporisés a été largement étudiée et des outils de model-checking matures ont été développés (Uppaal [11], Kronos [6]).

Les automates temporisés sont des automates finis qui manipulent des horloges qui progressent de façon uniforme et continue. Les transitions de ces automates peuvent être

---

1. École Normale Supérieure, Paris, France

2. LSV, CNRS & École Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France

soumises à des contraintes sur les horloges, et les horloges peuvent être remises à zéro lors de ces transitions. De nombreux études de cas ont été réalisés en utilisant ce modèle, à savoir la modélisation et la vérification des protocoles de communication ([7],[8]), d'un contrôleur de boîte de vitesse automatique ([12]). Cependant les automates temporisés sont un modèle idéalisé, et l'implémentation sur une machine physique ne conserve pas la sémantique du modèle. Cela est dû au fait que les horloges n'avancent pas continûment en réalité et la réaction du système aux signaux reçus n'est pas instantané.

**Implémentabilité des systèmes temps-réel** Dans [14], une *sémantique de programme* a été proposée pour les automates temporisés, qui prend en compte le défaut de continuité des horloges et le retard éventuel entre deux transitions successives. Cette sémantique correspond à l'exécution des automates temporisés par un modèle de microprocesseur simplifié. Un automate temporisé  $\mathcal{A}$  est dit *implémentable* pour une propriété si la sémantique de programme de  $\mathcal{A}$  vérifie cette propriété. La *sémantique élargie*, notée  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$  pour un automate temporisé  $\mathcal{A}$  et un paramètre  $\delta > 0$ , également introduite dans [14], est une sur-approximation de la sémantique de programme et est plus facile à manipuler. Les exécutions de  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$  sont définies en élargissant toute garde par  $\delta$ , i.e. en remplaçant toute contrainte de la forme  $x \in [a, b]$  par  $x \in [a - \delta, b + \delta]$  (voir la section 2 pour les définitions formelles).

Le problème du *model-checking robuste* consiste à décider si pour un automate temporisé  $\mathcal{A}$  donné, il existe  $\delta > 0$  tel que toutes les exécutions de  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$  vérifient une propriété  $P$  donnée. On dit dans ce cas que  $\mathcal{A}$  vérifie *robustement* la propriété  $P$ .

**Travaux récents** Le problème du model-checking robuste a été résolu pour les propriétés de sûreté dans [13] et [10] par un algorithme basé sur l'automate des régions, pour une classe d'automates temporisés, où tout cycle est supposé *de progrès*, c'est-à-dire que tout cycle de l'automate des régions remet toute horloge à zéro au moins une fois. On appellera cette restriction *l'hypothèse de cycles de progrès*. Le résultat a été généralisé aux propriétés de co-Büchi dans [4] et un algorithme original basé sur des machines à canaux a été proposé dans [5] pour le model-checking robuste d'un fragment décidable de MTL. [9] a donné le premier algorithme symbolique pour les propriétés de sûreté.

Ces travaux supposent l'hypothèse de cycles de progrès mais la pertinence de celle-là y est peu justifiée. Ils notent simplement que cette hypothèse est moins forte que d'être *fortement non-Zéno*. On trouve aussi cette restriction par exemple dans [2], dans le contexte du synthèse de contrôleur. Ici, on donne un schéma simple de programme qui manipule des horloges, modélisable par un automate temporisé, et qui contient un cycle qui n'est pas de progrès (Figure 1). Plusieurs types de systèmes modélisés par un automate temporisé, à savoir des pilotes de matériel, des protocoles de communication peuvent contenir naturellement ce schéma. On montre ainsi que l'hypothèse de cycles de progrès est contraignant pour la modélisation, d'où le besoin de développer des algorithmes pour les automates temporisés généraux.

**Notre contribution** Notre résultat principal est que le problème du model-checking robuste des propriétés de co-Büchi pour les automates temporisés généraux se réduit au problème du model-checking classique, en conservant la complexité du cas classique (PSPACE). Cela rend l'utilisation des outils existants possible pour la vérification robuste, sans avoir à implémenter de nouveaux algorithmes. Plus précisément, on montre que pour décider la satisfaction robuste d'une propriété donnée, on peut utiliser la sémantique classique d'une discrétisation de taille exponentielle de l'automate temporisé donné. Notre deuxième résultat est un algorithme de model-checking robuste des propriétés de co-Büchi, basé sur l'automate des régions, qui généralise l'algorithme de [4].

Développant les idées de [5] et [3], on utilise le codage par les machines à canaux pour raisonner sur les exécutions des automates temporisés et on tente d'éviter les arguments, parfois peu intuitifs, de topologie sur  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, nos techniques sont originales et basées sur les mots finis plutôt que sur les régions et les valuations réelles.

**Travail futur** Comme travail futur, on s'intéressera à une sémantique où seules les gardes portant sur un sous-ensemble des horloges sont élargies. L'intérêt de cette sémantique est que lors que le système temporisé est constitué de plusieurs composantes, les horloges de certaines composantes peuvent être précises, alors que d'autres ne le sont pas, dépendant de l'architecture du système. Par exemple, si on veut vérifier la correction d'un contrôleur, on peut supposer que les horloges internes du contrôleur sont précises, alors que les horloges des composantes (contrôlées) ne le sont pas. D'après les résultats préliminaires que nous avons obtenu, dans la sémantique où on élargit toutes les gardes sauf celles d'une horloge choisie (dite horloge précise), alors les états de contrôle accessibles dans cette sémantique sont exactement ceux accessibles dans la sémantique élargie étudiée ici. Nous savons également que la sémantique avec deux horloges précises est différente à la fois de la sémantique classique et de la sémantique élargie.

**Cycles faibles *versus* cycles de progrès** En termes de programmes informatiques, l'hypothèse de cycle de progrès correspond à l'interdiction de mesurer le temps passé à l'intérieur d'une boucle. En effet, sous cette restriction, lors de chaque itération d'une boucle, soit une variable discrète doit changer de valeur, soit toute horloge doit être remise à zéro. Cela peut être contraignant dans plusieurs systèmes qu'on peut vouloir modéliser par

---

```

bool retard;
clock x,y,z;
...
retard := false;
x := 0;
while ( x <= 1 ){
    ...
    if ( get_signal() == A ) break;
    else continue;
}
if ( x >= 1 )
    retard := true;

```

---

FIGURE 1 – Un schéma de programme qui attend un signal  $A$ , avec un *time-out* au bout d'une seconde.

un automate temporisé. Dans la figure 1, on considère un schéma général de programme qui représente un bout de code décrivant par exemple une pilote de matériel qui attend un signal particulier, appelé  $A$ , avant de continuer son exécution et entre dans un état de retard si le signal n'est pas reçu (ou est reçu trop tard). Comme l'horloge  $x$  n'est pas remise à zéro à l'intérieur de la boucle, toute modélisation fidèle de ce programme par un automate temporisé contient un cycle faible.

**Plan** On définit les automates temporisés et le codage par les machines à canaux dans la section 2. Dans la section 3, on présente notre réduction du model-checking robuste vers le model-checking classique pour les propriétés de co-Büchi. La preuve est présentée dans la sous-section 3.1 sous l'hypothèse de cycles de progrès, ensuite dans la sous-section 3.2 dans le cas général. Enfin, on présente notre algorithme de model-checking robuste basé sur l'automate des régions dans la section 4.

## 2 Préliminaires

### 2.1 Automates temporisés

Soit  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_X\}$  un ensemble fini d'horloges de cardinal  $X$ . On note par  $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ , les *contraintes sur les horloges* engendrées par la grammaire  $g ::= g \wedge g \mid x \leq k \mid x \geq k$ , où  $x \in \mathcal{X}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Une *valuation*  $v$  est un élément de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{X}}$ . Pour  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , on note par  $v + t$ , la valuation définie par  $(v + t)(x) = v(x) + t$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . Pour  $R \subseteq \mathcal{X}$ ,  $v' = v[R \leftarrow 0]$  est la valuation définie par  $v'(x) = 0$  pour tout  $x \in R$  et  $v'(x) = v(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{X} \setminus R$ .

Un *automate temporisé fermé* est un sextuplet  $\mathcal{A} = (\mathcal{L}, l_0, \mathcal{X}, \mathcal{I}, \Sigma, T)$ , où  $\mathcal{L}$  est un ensemble fini d'états de contrôle,  $l_0 \in \mathcal{L}$  l'état initial,  $\mathcal{X}$  l'ensemble d'horloges,  $\mathcal{I} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{X})$  les invariants associés à chaque état de contrôle, et  $T \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{G}(\mathcal{X}) \times \Sigma \times 2^{\mathcal{X}} \times \mathcal{L}$  l'ensemble des transitions.

Pour un paramètre  $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  donné, on définit la sémantique élargie  $\models_{\delta}$  des contraintes d'horloges comme suit.

$$\begin{aligned} v \models_{\delta} x \leq k & \quad \text{ssi } v(x) \leq k + \delta, \\ v \models_{\delta} x \geq k & \quad \text{ssi } v(x) \geq k - \delta, \\ v \models_{\delta} g_1 \wedge g_2 & \quad \text{ssi } v \models_{\delta} g_1 \text{ et } v \models_{\delta} g_2. \end{aligned}$$

On définit une sémantique paramétrée comme dans [14]. Pour tout  $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , soit le système de transition temporisé  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\delta} = \langle S, I, \Sigma, \mathbb{R}_{\geq 0}, \rightarrow_{\delta} \rangle$ , où l'ensemble des états est  $\mathcal{S}(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\delta}) = S = \{(l, v) \in \mathcal{L} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{X}} : v \models_{\delta} \mathcal{I}(l)\}$ , et l'état initial est  $I = (l_0, v_0)$  où  $v_0(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . Les transitions de  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\delta}$  sont les passages de temps  $(l, v) \xrightarrow{\tau}_{\delta} (l, v + \tau)$  pour  $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , si  $v$  et  $v + \tau$  satisfont tous les deux l'invariant  $\mathcal{I}(l)$ , et les transitions discrètes  $(l, v) \xrightarrow{\sigma}_{\delta} (l', v')$ , s'il existe  $(l, g, \sigma, R, l') \in T$  tel que  $v \models_{\delta} \mathcal{I}(l)$ ,  $v' = v[R \leftarrow 0]$  et  $v' \models_{\delta} \mathcal{I}(l')$ . On remarque que le cas  $\delta = 0$  correspond à la *sémantique exacte* de  $\mathcal{A}$ .

Un *chemin* de  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\delta}$  est une suite finie ou infinie de la forme  $(l_0, v_0) \xrightarrow{\tau_1}_{\delta} (l_0, v_0 + \tau_1) \xrightarrow{\sigma_1}_{\delta} (l_1, v_1) \xrightarrow{\tau_2}_{\delta} (l_1, v_1 + \tau_2) \dots$

Soit  $M$  la plus grande constante qui apparaît dans  $\mathcal{A}$ . On dit que  $\mathcal{A}$  vérifie l'*hypothèse de cycles de progrès* si tout cycle de l'automate des régions de  $\mathcal{A}$  contient au moins une remise à zéro pour chaque horloge dont la valeur est inférieure ou égale à  $M$ .

## 2.2 Codage par les machines à canaux

Étant donné un automate temporisé  $\mathcal{A}$ , [5] définit un réseau de systèmes temporisés  $\mathcal{B}^N$  paramétré par un entier  $N > 0$ , afin d'étudier les propriétés linéaires (temporisées) satisfaites robustement par  $\mathcal{A}$ . Le système  $\mathcal{B}^N$  est défini à partir de  $\mathcal{A}$ , en introduisant  $N$  nouvelles horloges dont la valuation est à tout moment une subdivision régulière de l'intervalle  $[0, 1]$ . Ces horloges supplémentaires servent à évaluer la proximité de la valeur d'une horloge à une valeur entière, et à tester ainsi la satisfaction des formules dans la sémantique élargie. Leur algorithme de model-checking robuste (d'un fragment de MTL) est basé sur un codage des régions de  $\mathcal{B}^N$  par des *machines à canaux avec renommage et test d'occurrence*. Dans ce travail, nos raisonnements sont également basés sur le même codage, mais on utilise une version simplifiée, qu'on définit directement sans introduire  $\mathcal{B}^N$  ni les machines à canaux.

### 2.2.1 Le système de transition $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ .

**Les états** Étant donné un automate temporisé  $\mathcal{A} = (\mathcal{L}, l_0, \mathcal{X}, \mathcal{I}, \Sigma, T)$ , on définit un système de transitions appelé  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ , paramétré par un entier  $N > 0$ , en introduisant  $N$  nouvelles horloges  $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ . Pour une valuation  $v$  des horloges  $\mathcal{X} \cup \{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}$ , soit la propriété suivante :

$$v(\Delta_1) \neq 0, v(\Delta_N) \neq 1, \text{ et } v(x) \neq v(\Delta_i), \forall x \in \mathcal{X}, \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (*)$$

On note  $M$  la plus grande constante qui apparaît dans  $\mathcal{A}$ . Pour tout état de contrôle  $l$  et toute valuation  $v : \mathcal{X} \cup \{\Delta_1, \dots, \Delta_N\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  qui vérifie l'invariant  $\mathcal{I}(l)$  et  $(*)$ ,  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  contient l'état  $(d, c) \in (\mathcal{L} \times 2^{\mathcal{X}} \times \{0, \dots, M, \infty\}^{\mathcal{X}}) \times \Gamma^*$  avec  $\Gamma = 2^{\mathcal{X}} \cup \{\Delta\}$ , qui code la région à laquelle  $v$  appartient, de la manière suivante. La première composante de l'état discret  $d$ , notée  $\text{loc}(d)$ , est l'état de contrôle  $l$  de  $\mathcal{A}$ ; la deuxième est l'ensemble des horloges ayant une valeur entière; et la troisième, notée  $\text{int}(d)$ , est une fonction qui associe à chaque horloge de  $\mathcal{X}$  une valeur entière parmi  $\{0, \dots, M\}$  ou  $\infty$ . Le mot du ruban  $c \in \Gamma^*$  contient les symboles d'ensembles d'horloges ayant une valeur entière inférieure ou égale à  $M$ , ordonnés par les parties fractionnaires dans  $v$ . Une horloge est dite *présente* dans  $c$  si elle y apparaît. On impose que tout symbole d'horloge y apparaisse au plus une fois. Dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ , les horloges  $\Delta_i$  auront un rôle identique, donc on omettra l'indice  $i$  en écrivant les mots du ruban. Si  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ ,  $N = 2$ , et que la valuation  $v$  vérifie  $0 = \{v(x)\} < \Delta_1 < \{v(y)\} = \{v(z)\} < \Delta_2$ , en notant  $\{\cdot\}$  la partie fractionnaire d'un nombre, alors le contenu du ruban correspondant est noté  $x\Delta\langle yz \rangle\Delta$ , où  $\langle yz \rangle$  dénote l'ensemble  $\{y, z\}$ . Le fait que  $v(x)$  est un entier est codé dans l'état discret, mais l'explicitera en écrivant  $x\|\Delta\langle yz \rangle\Delta$ , où le symbole  $\|$  est inséré pour faciliter la lecture et ne fait pas partie du mot du ruban.

L'état initial de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  est  $(d_0, \mathcal{X} \parallel \Delta^N)$ , où  $d_0$  est tel que  $\text{loc}(d_0) = l_0$ , et toute horloge de  $\mathcal{X}$  a la valeur nulle. L'ensemble des états de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  est noté  $\mathcal{S}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N))$ .

**Représentations des mots du ruban** Pour des raisons de simplicité, on adopte plusieurs façons d'écrire les mots du ruban. La forme générale est la suivante.

$$\parallel \Delta^{n_0} x_{i_1} \Delta^{n_1} \dots x_{i_m} \Delta^{n_m}, \quad (1)$$

où il est sous-entendu que  $n_0, n_1, \dots, n_m \geq -1$ ,  $0 \leq m \leq X$  et  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{X}$  (les horloges présentes). Si deux horloges  $x$  et  $y$  ont la même partie fractionnaire, alors dans la notation de (1), on écrit  $x\Delta^{-1}y$ . Quand on voudra expliciter le fait que  $x$  et  $y$  se trouvent dans le même ensemble, on pourra aussi écrire  $\langle xy \rangle$ . Si l'horloge  $x_{i_1}$  a une valeur entière on aura  $n_0 = -1$ , mais on pourra aussi écrire explicitement  $x_{i_1} \parallel \Delta^{n_1} x_{i_2} \dots$  (le sens de  $n_1 = -1$  est maintenant clair dans ce dernier cas, où on pourra aussi écrire explicitement  $\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle \parallel \Delta^{n_2}$  etc.). Idem pour  $x_{i_m}$  si  $n_m = -1$ . Il est clair que le sous-mot  $x\Delta^{-1}y$  a le même sens que  $y\Delta^{-1}x$  : on en choisira un qui convient. S'il n'y a pas de confusion sur l'ordre et la présence des horloges sur le ruban, on notera parfois  $\vec{n} = (n_0, n_1, \dots, n_{m-1}, n_m)$ .

Un mot de la forme (1) définit  $m+1$  blocs de  $\Delta$ , des facteurs maximaux de  $c$  appartenant à  $\Delta^* \cup \{\Delta^{-1}\}$ , séparés par les symboles d'horloges. Un bloc précédé par l'horloge  $x_i$  est appelé le bloc  $i$ , et le premier bloc (qui n'est précédé par aucune horloge) est appelé le bloc 0. Ainsi, dans (1), on trouve les blocs  $i_0, i_1, \dots, i_m$ , où on notera toujours  $i_0 = 0$ . Pour tout état  $q$  et horloge  $x_j$ , on définit  $\text{left}_{\Delta}^q(x_j)$  comme le nombre de  $\Delta$  entre la tête du ruban et  $x_j$  dans le contenu du ruban de  $q$ . On définit de même  $\text{right}_{\Delta}^q(x_j)$  à droite.

**Les transitions** Les transitions de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  sont étiquetées par les éléments de  $\Sigma \cup \mathbb{N}$ . Un *passage de temps* est une transition étiquetée par  $\tau \in \mathbb{N}$ , et est notée  $\xrightarrow{\tau}$ . Si  $\tau = 0$ , alors  $\xrightarrow{\tau}$  est l'identité. On définit  $\xrightarrow{1}$ , le *passage de temps élémentaire*, par les cas suivants.

$$\begin{aligned} (i) \quad & (d, x \parallel w) \xrightarrow{1} (d_1, \parallel x \cdot w), & (iii) \quad & (d, \parallel w \cdot x) \xrightarrow{1} (d_2, \parallel w) \quad \text{si } \text{int}(x) = M, \\ (ii) \quad & (d, \parallel w \cdot \Delta) \xrightarrow{1} (d, \parallel \Delta \cdot w) & (iv) \quad & (d, \parallel w \cdot x) \xrightarrow{1} (d_3, x \parallel w) \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (2)$$

où  $x \subseteq \mathcal{X}$  est un symbole d'ensemble d'horloges,  $w$  un mot du ruban et  $\cdot$  dénote la concaténation de mots. L'état discret  $d_1$  (resp.  $d_3$ ) s'obtient à partir de  $d$ , en enlevant  $x$  de (resp. en ajoutant  $x$  dans) l'ensemble des horloges ayant une valeur entière. L'état  $d_2$  est identique à  $d$  à l'exception d'avoir  $\text{int}(d_2)(x) = \infty$ . Ce dernier cas correspond à la disparition d'une horloge dont la valeur dépasse la constante maximale  $M$ . Pour pouvoir évaluer la satisfaction des gardes élargies, on fait disparaître ces horloges quand elles atteignent la valeur  $M+1$ . Elles peuvent réapparaître sur le ruban lors d'une remise à zéro. Ainsi, un passage de temps élémentaire associe à un état son successeur temporel, en sautant les régions où un  $\Delta_i$  a une valeur entière. Pour un entier  $\tau > 1$ , on définit  $\xrightarrow{\tau}$  comme  $(\xrightarrow{1})^{\tau}$ . Si le cas (iii) est appliqué lors d'un passage de temps  $\xrightarrow{\tau}$ , alors on dit

que l'horloge  $x$  disparaît du ruban lors de ce passage de temps. La *durée* d'un passage de temps  $\xrightarrow{\tau}$ , notée  $\text{temps}(\xrightarrow{\tau})$ , est  $\tau$ .

Soit  $q$  un état de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ . Une formule " $x \leq k$ " est *satisfaite exactement* par  $q$  ssi  $\text{int}(q)(x) \leq k - 1$  ou ( $\text{int}(q)(x) = k$  et  $x$  est entière). Cette formule est *satisfaite inexactement* ssi  $\text{int}(q)(x) = k$ ,  $x$  n'est pas entière et  $\text{left}_q(x) \leq 1$ . De manière symétrique, une formule " $x \geq k$ " est satisfaite exactement par  $q$  ssi  $\text{int}(q)(x) \geq k$ ; et est satisfaite inexactement ssi  $\text{int}(q)(x) = k - 1$  et  $\text{right}_q(x) \leq 1$ . Une formule est dite *satisfaite* ssi elle est satisfaite exactement ou inexactement. La satisfaction des conjonctions de ces formules est définie usuellement.

Une *transition discrète* est une transition étiquetée par  $\sigma \in \Sigma$ , et est notée par  $\xrightarrow{\sigma}$ . Soit  $(l, g, \sigma, R, l')$ , une transition de  $\mathcal{A}$  d'étiquette  $\sigma$ . Pour tout état  $q$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  qui satisfait la garde  $g$ , soit  $q'$  défini à partir de  $q$ , où l'état de contrôle changé en  $l'$ , et les horloges ont les mêmes valeurs sauf celles de  $R$  qui valent zéro (elles sont déplacées en tête du ruban et on a  $\text{int}(q')(x) = 0$  pour tout  $x \in R$ ). On pose alors  $q \xrightarrow{\sigma} q'$ .

Pour tout passage de temps  $\xrightarrow{\tau}$ , on définit  $\text{temps}_{\Delta}(q, \xrightarrow{\tau})$  comme le nombre de fois où le cas (ii) de (2) est appliqué. Intuitivement, si on interprète un passage de temps comme une suite de lecture et réécriture dans le ruban, alors  $\text{temps}_{\Delta}(q, \xrightarrow{\tau})$  est le nombre de symboles de  $\Delta$  lus lors de  $\xrightarrow{\tau}$ . S'il n'y a pas de confusion, on écrira simplement  $\text{temps}_{\Delta}(\tau)$ . Pour une transition discrète  $\sigma$ , on pose  $\text{temps}(\sigma) = \text{temps}_{\Delta}(\sigma) = 0$ . On étend ainsi  $\text{temps}()$  et  $\text{temps}_{\Delta}()$  aux suites de transitions, par la somme de ces durées pour chaque transition.

Une suite d'états  $\pi = \pi_1 \dots \pi_n \dots$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  est appelé *un chemin* si  $\pi_1$  est l'état initial et s'il existe des transitions  $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \dots \in \Sigma \cup \mathbb{N}$  telles que  $\pi_1 \xrightarrow{\delta_1} \pi_2 \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \pi_n \dots$ . On impose qu'un chemin contienne au moins un passage de temps entre deux transitions discrètes (éventuellement de durée nulle), et qu'il ne contienne pas un nombre infini de passages de temps consécutifs. De plus, on impose que si un chemin contient plusieurs passages de temps consécutifs, chacun se termine dans un état où une horloge a une valeur entière, sauf éventuellement le dernier. La suite de transitions  $(\delta_i)_{i \geq 1}$  est appelée *la trace* du chemin  $\pi$ . En remplaçant les passages de temps consécutifs de  $\delta$  par un symbole réservé `time`, on obtient une *trace non-temporisée*, notée  $\text{untime}(\delta)$ . Pour un chemin  $\pi$ , on note par  $|\pi|_{\text{time}}$  le nombre de passages de temps que contient sa trace non-temporisée. Si un chemin entre les états  $q$  et  $q'$  suit une trace  $(\delta_i)_{i \geq 1}$ , on écrit  $q \xrightarrow{\delta}^* q'$ . Si  $\delta$  est une trace non-temporisée, alors on entend par cette écriture qu'il existe une trace  $\delta'$  avec  $\text{untime}(\delta') = \delta$  telle que  $q \xrightarrow{\delta'}^* q'$ . Pour un chemin  $\pi = \pi_1 \dots \pi_n \dots$ , on note par  $\text{loc}(\pi)$  la suite  $\text{loc}(\pi_1) \dots \text{loc}(\pi_n) \dots$ . Pour un chemin fini  $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$ , on pose  $\text{first}(\pi) = \pi_1$  et  $\text{last}(\pi) = \pi_n$ .

### 2.2.2 Relations de simulation entre $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ et $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\delta}$ .

Étant donnés deux systèmes de transitions temporisés  $\mathcal{T}_i = (S_i, I_i, \Sigma, \mathbb{K}_i, \rightarrow_i)$  pour  $i = 1, 2$ , où  $\mathbb{K}_i = \mathbb{R}_{\geq 0}$  ou  $\mathbb{N}$ , une relation  $\mathcal{R} \subseteq S_1 \times S_2$  est une *simulation bidirectionnelle temps abstrait* si  $I_1 \mathcal{R} I_2$  et,

- Si  $s_1 \mathcal{R} s_2$  et  $s_1 \xrightarrow{\alpha} s'_1$ , alors il existe  $s'_2 \in S_2$  tel que  $s_2 \xrightarrow{\alpha'} s'_2$  avec  $s'_1 \mathcal{R} s'_2$ , où  $\alpha = \alpha'$  si  $\alpha \in \Sigma$  et  $\alpha' \in \mathbb{K}_2$  sinon,
- Si  $s_1 \mathcal{R} s_2$  et  $s'_1 \xrightarrow{\alpha} s_1$ , alors il existe  $s'_2 \in S_2$  tel que  $s'_2 \xrightarrow{\alpha'} s_2$  avec  $s'_1 \mathcal{R} s'_2$ , où  $\alpha = \alpha'$  si  $\alpha \in \Sigma$  et  $\alpha' \in \mathbb{K}_2$  sinon,

On écrit alors  $\mathcal{T}_1 \sqsubseteq_{\mathcal{R}} \mathcal{T}_2$ .

On note  $v \cup \delta$  l'union de deux valuations  $v$  et  $\delta$ . Pour tout état  $(l, v)$  de  $\mathcal{A}$  et  $\delta$  une valuation des horloges  $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ , telle que  $v \cup \delta$  vérifie (\*), on définit  $h((l, v \cup \delta))$  comme l'état de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  correspondant.

Pour tout  $(l, v_{\mathcal{X}}) \in \mathcal{A}$  et  $q \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ , on pose  $(l, v_{\mathcal{X}}) \prec_{\text{abs}} q$  s'il existe  $\delta \in ]0, 1[^{\{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}}$  tel que  $\delta(\Delta_{i+1}) - \delta(\Delta_i) = \frac{1}{N}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ ,  $v_{\mathcal{X}} \cup \delta$  vérifie (\*), et  $h(l, v_{\mathcal{X}} \cup \delta) = q$ . On définit  $\prec_{\text{conc}}$  par  $q \prec_{\text{conc}} (l, v_{\mathcal{X}})$  si et seulement si  $(l, v_{\mathcal{X}}) \prec_{\text{abs}} q$ .

Le lemme suivant s'adapte à partir du lemme 2 de [5].

**Lemme 2.1.** *Pour tout  $N \geq 3$ ,  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}} \sqsubseteq_{\prec_{\text{abs}}} \llbracket \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N) \rrbracket \sqsubseteq_{\prec_{\text{conc}}} \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{2}{N}}$ .*

Pour un état  $q$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ , on pose

$$\text{Val}_{\mathcal{X}}(q) = \{v \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} : \exists \delta \in [0, 1]^N, v \cup \delta \text{ vérifie (*) et } h(\text{loc}(q), v \cup \delta) = q\}.$$

Dans cette définition, on n'impose pas que les  $\delta(\Delta_i)$  soit régulièrement distribués dans  $]0, 1[$ . Ainsi  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q)$  est l'ensemble des valuations de  $\mathcal{X}$  qui ont pour abstraction  $q$ . Donc on peut remarquer que  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q)$  est une région de  $\mathcal{A}$ . Soit  $[q] = \overline{\text{Val}_{\mathcal{X}}(q)}$  l'adhérence topologique de  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q)$ . Pour deux états  $q$  et  $q'$ , on a  $[q'] \subseteq [q]$  si et seulement si

- $\text{loc}(q) = \text{loc}(q')$ ,
- pour toute inégalité entre les parties fractionnaires de deux horloges satisfaite dans  $q$ , la version large de cette inégalité est satisfaite dans  $q'$ ,
- toute horloge qui a une valeur entière dans  $q$  a la même valeur dans  $q'$ ,
- les parties entières ne diffèrent que de la manière suivante : Si  $\{x_{i_1}\} \leq \dots \leq \{x_{i_m}\}$  est l'ordre des parties fractionnaires des horloges dans les deux états, pour un certain  $r \leq m$ , les horloges  $\{x_{i_r}, \dots, x_{i_m}\}$  vérifient toutes soit  $\text{int}(d')(x_j) = \text{int}(d)(x_j)$ , soit  $\text{int}(d')(x_j) = \text{int}(d)(x_j) + 1$ .

Cette caractérisation découle du fait que  $[q]$  est l'adhérence d'une région de  $\mathcal{A}$ .

**Exemple 2.2.** *Soient les états  $(d, c)$  et  $(d', c')$  définis comme suit.*

$$\begin{aligned} d &= \{l, \{x_1\}, \{x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = 2\}\} & c &= x_1 \parallel x_2 \Delta^3 \langle x_3 x_4 \rangle \Delta x_5 \Delta^n \\ d' &= \{l, \{x_1, x_2, x_5\}, \{x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = 3\}\} & c' &= \langle x_1 x_2 x_5 \rangle \parallel \langle x_3 x_4 \rangle \Delta^{n+3} \end{aligned}$$

Alors  $[(d', c')] \subseteq [(d, c)]$ .

En particulier, on a la propriété suivante.

**Propriété 2.3.** *Pour deux états  $q$  et  $q'$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ , on a  $[q'] \subseteq [q]$  si et seulement si  $q'$  peut être obtenu à partir de  $q$  en conservant les blocs de taille  $-1$  et en modifiant les autres blocs arbitrairement, sans changer l'ordre des horloges sur le ruban.*



### 3 Model-checking robuste des propriétés de co-Büchi

Une propriété de co-Büchi est définie comme suit : Étant donné un ensemble d'états de contrôle  $B \subseteq \mathcal{L}$ , un chemin  $\pi$  vérifie la condition co-Büchi( $B$ ), si  $\pi$  rencontre un nombre fini de fois les états de  $B$ . Soit  $\phi$  la propriété co-Büchi( $B$ ), pour un ensemble  $B$  donné. On dit que  $\mathcal{A}$  satisfait robustement  $\phi$ , s'il existe  $\delta > 0$  tel que tous les chemins de  $[[\mathcal{A}]]_\delta$  satisfont  $\phi$ , et on note dans ce cas  $\mathcal{A} \models \phi$ . De la même manière,  $\mathcal{C}_\mathcal{A}$  satisfait robustement  $\phi$ , ce qui est noté  $\mathcal{C}_\mathcal{A} \models \phi$ , s'il existe  $N > 0$  tel que  $\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^N) \models \phi$ . Par le lemme 2.1, on peut travailler avec  $\mathcal{C}_\mathcal{A}$  pour l'étude de la satisfaction robuste des propriétés de co-Büchi de  $\mathcal{A}$ . On a, en effet,

$$\mathcal{A} \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{C}_\mathcal{A} \models \phi.$$

On démontre qu'il suffit de tester  $\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^N)$  pour un certain  $N$  qui dépend de  $\mathcal{A}$ , pour décider la satisfaction robuste de  $\mathcal{C}_\mathcal{A}$ , quelque soit la propriété de co-Büchi. On note par  $W$  le nombre de régions de  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 3.1** (Théorème principal). *Soit  $\mathcal{A}$  un automate temporisé. Soit  $N_1$  qui vérifie  $N_1 \geq 3X^2(2W + 3)$  si  $\mathcal{A}$  vérifie l'hypothèse de cycles de progrès, et  $N_1 \geq 3(2W + 1)X^2(X!|\mathcal{L}| + 3)$  sinon. Alors, pour toute propriété de co-Büchi  $\phi$ ,*

$$\exists N \geq 3, \mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^N) \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^{N_1}) \models \phi.$$

Le sens de droite à gauche du théorème est évident. On démontre la contraposée de l'autre sens :

$$\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^{N_1}) \not\models \phi \Rightarrow \forall N \geq 3, \mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^N) \not\models \phi.$$

On procède en deux étapes. D'abord, on montre dans le lemme suivant que tout chemin de  $\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^{N_1})$  qui ne satisfait pas  $\phi$  peut être suivi par  $\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^N)$ , pour tout  $0 < N < N_1$ .

Pour deux états  $q, q'$ , respectivement appartenant à  $\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^N)$  et  $\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^{N+1})$ , on définit  $q \prec^- q'$  ssi  $q'$  s'obtient à partir de  $q$  en enlevant un  $\Delta$  au mot du ruban.

**Lemme 3.2.** *Pour tout  $N \geq 3$ , on a  $\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^{N+1}) \sqsubseteq_{\prec^-} \mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^N)$ .*

La deuxième étape consiste à montrer que si  $\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^{N_1})$  a un chemin qui ne satisfait pas  $\phi$ , alors on peut construire un chemin de  $\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^{N_1+L})$  qui ne satisfait pas  $\phi$ , pour tout  $L > 0$ . Contrairement à la première étape, on ne pourra pas avoir une relation de simulation, ni conserver le langage non-temporisé mais le chemin construit satisfera les mêmes propriétés de co-Büchi que le chemin original. On commence par quelques définitions sur les mots pour décrire la trace obtenue. Pour un mot fini  $w = a_1 \dots a_n$  sur un alphabet  $Q$ , on définit

$$\tilde{w} = \{u_1^+ u_2^+ \dots u_{i-1}^+ (u_i^+ u_{i+1}^+ \dots u_j^+)^+ : u_1, \dots, u_j \in Q^*, u_1 \dots u_j = w\}.$$

Le langage  $\tilde{w}$  contient en particulier les mots finis obtenus en répétant d'abord certains facteurs de  $w$ , ensuite en répétant un suffixe du mot obtenu. On remarque que les mots

de  $\tilde{w}$  contiennent obligatoirement toutes les lettres de  $w$  et qu'ils commencent et se terminent par les mêmes lettres que  $w$ . On étend cette définition aux mots infinis comme suit. Pour un mot infini  $w = (w_i)_{i \geq 1}$ , on définit  $\tilde{w}$  comme l'ensemble des mots infinis  $w'$  qui admettent une factorisation  $w' = f'_0 f'_1 f'_2 \dots$  où les  $f'_i$  sont des mots finis, tels qu'il existe une factorisation  $w = f_0 f_1 f_2 \dots$  où les  $f_i$  sont des mots finis, avec  $f'_i \in \tilde{f}_i$  pour tout  $i \geq 1$ . Alors tout état qui se répète infiniment souvent dans  $w$ , se répète aussi infiniment souvent dans  $\tilde{w}$ . Ainsi, si  $w$  ne satisfait pas une propriété de co-Büchi, alors  $\tilde{w}$  non plus. On définit  $\widetilde{(\tilde{w})^n}$  par  $\widetilde{(\tilde{w})^n} = (\widetilde{(\tilde{w})^{n-1}})$  et  $\widetilde{(\tilde{w})^1} = \tilde{w}$ .

Le lemme de pompage suivant, qui implique le théorème 3.1, est le lemme principal de cette section. La preuve est donnée dans les deux sous-sections suivantes, d'abord sous l'hypothèse de cycles de progrès, ensuite dans le cas général. Étant donné un automate temporisé, on note  $K_0 = 2|\mathcal{L}| \max(4^X, X!) + 5$ , et  $W$  le nombre de régions.

**Lemme 3.3** (Lemme de pompage). *Soit  $\mathcal{A}$  un automate temporisé. Soit  $N_1 \geq 8X^2(W + 1)$  si  $\mathcal{A}$  vérifie l'hypothèse de cycles de progrès, et  $N_1 \geq 4X^3K_0^2(W + 1)$  sinon. Alors pour tout chemin infini  $\pi = (\pi_i)_{i \geq 1}$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  et pour tout  $L \geq 0$ , il existe un chemin  $\pi' = (\pi'_i)_{i \geq 1}$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{N+L})$  tel que  $\text{loc}(\pi') \in (\widetilde{\text{loc}(\pi)})^n$ , pour un certain  $n \geq 0$ .*

On a le corollaire suivant par le théorème 3.1 et les lemme 3.3 et 2.1.

**Corollaire 3.4.** *Pour toute propriété de co-Büchi  $\phi$ ,  $\mathcal{A}$  satisfait  $\phi$  robustement si et seulement si  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N_1}}$  satisfait  $\phi$ .*

On obtient ainsi un algorithme de model-checking robuste des propriétés de co-Büchi en PSPACE. En effet, pour décider la satisfaction robuste d'une propriété par  $\mathcal{A}$ , il suffit de tester la satisfaction classique de cette propriété par  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N_1}}$ , qui peut être exprimé par la sémantique exacte de l'automate temporisé obtenu à partir de  $\mathcal{A}$  en remplaçant toute formule " $x \leq k$ " par " $x \leq kN_1 + 1$ " et " $x \geq k$ " par " $x \geq kN_1 - 1$ ". Il s'agit d'une discrétisation de  $\mathcal{A}$  qui conserve la complexité spatiale (exponentielle).

### 3.1 Lemme de pompage sous l'hypothèse de cycles de progrès

On fixe  $\mathcal{A}$  où tout cycle est de progrès. Pour obtenir un lemme de pompage, on montre que tout chemin de longueur bornée peut être transformé en un chemin qui satisfait toutes les gardes et tous les invariants exactement et qui est en plus proche du chemin original (lemme 3.14). Il s'ensuit que si ce chemin est assez long, alors il contient un cycle (de progrès). On montre ensuite qu'on peut prendre ce préfixe de chemin avec  $\Delta^L$  de plus dans le ruban (lemme 3.8), et arrivé au cycle de progrès, on pourra boucler autant qu'il faut pour se déplacer vers un état adapté (lemme 3.17) pour répéter cette construction dans la suite du chemin. Le plan général de la preuve est inspirée de la preuve de correction de l'algorithme de [10].

### 3.1.1 Des grands blocs

Pour un entier  $n$ , on note  $n^+ = \max(0, n)$ . Soit  $c$  un mot du ruban et  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$  les horloges qui y apparaissent. On définit  $c[x_{i_j} \leftarrow x_{i_j} \Delta^L]$  pour  $L > 0$ , comme le mot obtenu à partir de  $c$ , en remplaçant le bloc  $i_j$  par  $\Delta^{n_j^+ + L}$ . Pour le bloc 0, on définit  $c[x_{i_1} \leftarrow \Delta^L x_{i_1}]$  comme le mot où on a remplacé le bloc 0 par  $\Delta^{n_0^+ + L}$ . Pour ce dernier, on écrira abusivement  $c[x_{i_0} \leftarrow x_{i_0} \Delta^L]$ .

Pour un état discret  $d$ , si une garde  $x_{i_j} \leq k$  est satisfaite inexactement en  $(d, c)$ , alors on a  $\text{left}_{\Delta}^{(d,c)}(x_{i_j}) \leq 1$ . De même, si une garde “ $x_{i_j} \geq k$ ” est satisfaite inexactement en  $(d, c)$ , alors  $\text{right}_{\Delta}^{(d,c)}(x_{i_j}) \leq 1$ . Si  $\text{left}_{\Delta}^{(d,c)}(x_{i_j}) \geq 2$  (resp.  $\text{right}_{\Delta}^{(d,c)}(x_{i_j}) \geq 2$ ) alors toute garde de la forme  $x_{i_j} \leq k$  (resp.  $x_{i_j} \geq k$ ) satisfaite en  $(d, c)$  est satisfaite exactement. En particulier  $n_m \geq 2$  (resp.  $n_0 \geq 2$ ) implique cette condition.

On remarque alors que si  $n_m \geq 2$  lors d’une transition, alors la même transition est réalisable si on remplace  $n_m$  par  $n_m + L$  dans  $c$  pour  $L > 0$  quelconque. Idem pour  $n_0$ . Quant aux blocs  $i_j \notin \{i_0, i_m\}$ , la même transition est réalisable aussi en remplaçant  $n_j$  par  $n_j^+ + L$  dès que  $n_j \geq 2$ . Suivant cette idée, on va montrer que si le long d’un chemin  $\pi$ , un bloc  $j$  est tel que  $n_m \geq 2$  ou  $n_0 \geq 2$  à chaque transition où  $x_j$  est la dernière horloge du ruban, alors le chemin peut être adapté pour commencer à  $(d, c[x_j \leftarrow x_j \Delta^L])$  (voir le lemme 3.8). On dira qu’un tel bloc *reste grand* sur ce chemin.

Pour définir la notion de rester grand, on va marquer un bloc et le suivre sur le chemin considéré. On note un *état marqué*  $(\pi_1, j)$  où  $\pi_1$  est un état et  $j$  un bloc de  $\pi_1$ . On définit une relation  $\prec$  sur les états marqués comme suit. On commence par les paires d’états  $\pi_1$  et  $\pi_2$  telles que  $\pi_1 \xrightarrow{1} \pi_1'$ . Soit  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$  les horloges présentes dans  $\pi_1$ . On note  $\pi_2 = (d', \vec{n}')$ . On pose,

$$\begin{aligned} (\pi_1, i_0) \prec (\pi_2, i_0) & \quad \text{si } n'_0 \geq 2, \\ (\pi_1, i_0) \prec (\pi_2, i_m) & \quad \text{si } n'_0 = -1, \\ (\pi_1, i_m) \prec (\pi_2, i_0) & \quad \text{si } n'_0 \geq 2, \\ (\pi_1, i_m) \prec (\pi_2, i_m) & \quad \text{si } n'_m \geq 2, \\ (\pi_1, i_1) \prec (\pi_2, i_0) & \quad \text{si } x_{i_1} \text{ disparaît} \\ (\pi_1, i_j) \prec (\pi_2, i_j) & \quad \text{si } i_j \neq i_0, i_m. \end{aligned}$$

Pour deux états  $\pi_1 \xrightarrow{\tau} \pi_2$  avec  $\tau > 0$  quelconque, soit la suite  $\pi_1 = q_1 \dots q_k = \pi_2$  des états séparés par des passages de temps élémentaires composant  $\tau$ . On pose  $(\pi_1, i_j) \prec (\pi_2, i_{j'})$  s’il existe  $i_j = l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, l_k = i_{j'}$  tels que  $(q_1, l_1) \prec \dots \prec (q_k, l_k)$ .

Pour une transition discrète d’étiquette  $\sigma$ , on note par  $R(\sigma)$  l’ensemble des indices des horloges remises à zéro lors de  $\sigma$ . Soit un état  $\pi_1$  avec  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$  les horloges présentes. Pour un bloc  $i_j \neq i_0$ , soit  $\text{NR}_{\sigma, \pi_1}(i_j) = i_1$  si  $i_1, \dots, i_j \in R(\sigma)$  et  $\text{NR}_{\sigma, \pi_1}(i_j) = i_{\max\{1 \leq s \leq j : i_s \notin R(\sigma)\}}$  sinon. Ainsi, le bloc  $i_j$  est fusionné avec les blocs  $i_s, i_{s+1}, \dots, i_{j-1}$  lors de la transition  $\sigma$ , en notant  $i_s = \text{NR}_{\sigma, \pi_1}(i_j)$ . Pour le bloc  $i_0$ , on pose  $\text{NR}_{\sigma, \pi_1}(i_0) = i_0$  si  $R(\sigma) = \emptyset$  et  $\text{NR}_{\sigma, \pi_1}(i_0) = i_{\min\{j : i_j \in R(\sigma)\}}$  sinon. Pour toute paire d’états  $\pi_1, \pi_2$  tels que  $\pi_1 \xrightarrow{\sigma} \pi_2$ , on pose  $(\pi_1, i_j) \prec (\pi_2, \text{NR}_{\sigma, \pi_1}(i_j))$ .

**Definition 3.5.** Soit un chemin  $\pi : \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$  et un bloc  $j_1$  de  $\pi_1$  de taille au moins 2. Le

bloc  $j_1$  reste grand sur  $\pi$  s'il existe  $j_2, \dots, j_n$  tels que  $(\pi_1, j_1) \prec (\pi_2, j_2) \prec \dots \prec (\pi_n, j_n)$ . On dit que le bloc  $j_1$  est continué par le bloc  $j_n$  sur le chemin  $\pi$ . Un bloc se décompose sur un chemin s'il n'y reste pas grand.

L'intérêt de cette définition est qu'un bloc qui reste grand peut être remplacé par un bloc plus grand. On traite d'abord le passage de temps, ensuite les transitions discrètes dans les deux propositions qui suivent.

**Proposition 3.6.** *Soit deux états  $(d, c)$  et  $(d', c')$  tels que  $(d, c) \xrightarrow{\tau} (d', c')$ . Alors pour tout bloc  $i_j$  de  $c$  de taille au moins 2, il existe  $\tau' \geq \tau$  tel que  $(d, c[x_{i_j} \leftarrow x_{i_j} \Delta^L]) \xrightarrow{\tau'} (d', c'[x_{i_j} \leftarrow x_{i_j} \Delta^L])$ , pour tout  $L \geq 0$ .*

*Démonstration.* Il suffit de le montrer pour  $L = 1$ . Pour construire  $\tau'$ , on effectue un passage de temps supplémentaire à chaque fois que  $x_{i_j}$  arrive à la fin du ruban et est réécrit à la tête.  $\square$

**Proposition 3.7.** *Soit deux états  $(d, c)$  et  $(d', c')$  tels que  $((d, c), i_j) \prec ((d', c'), i_{j'})$  et  $(d, c) \xrightarrow{\sigma} (d', c')$ . Alors on a  $(d, c[x_{i_j} \leftarrow x_{i_j} \Delta^L]) \xrightarrow{\sigma} (d', c'[x_{i_{j'}} \leftarrow x_{i_{j'}} \Delta^L])$ , pour tout  $L \geq 0$ .*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que le bloc  $i_j$  est de taille au moins 2 dans  $(d, c)$  donc  $(d, c[x_{i_j} \leftarrow x_{i_j} \Delta^L])$  satisfait les mêmes formules que  $(d, c)$ . L'état d'arrivée est bien  $(d', c'[x_{i_{j'}} \leftarrow x_{i_{j'}} \Delta^L])$  par définition de  $\prec$ .  $\square$

On déduit des deux propositions précédentes un lemme de pompage pour des chemins où un bloc reste grand.

**Lemme 3.8.** *Soit  $\pi : \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$  un chemin tel que  $(\pi_1, j_1) \prec (\pi_2, j_2) \prec \dots \prec (\pi_n, j_n)$  pour certains  $0 \leq j_1, \dots, j_n \leq X$ . Alors, pour tout  $L > 0$ , il existe un chemin  $\pi' : (\pi_1[x_{j_1} \leftarrow x_{j_1} \Delta^L]) \rightarrow^* (\pi_n[x_{j_n} \leftarrow x_{j_n} \Delta^L])$ , où  $\text{untime}(\pi) = \text{untime}(\pi')$ .*

On va montrer que tout bloc assez grand reste grand sur un chemin borné. Regardons de plus près un chemin  $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$  sur lequel un bloc  $j_1$  se décompose. Par définition, le bloc  $j_1$  se décompose sur  $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$  si et seulement si pour tout  $j_2$  tel que  $(\pi_1, j_1) \prec (\pi_2, j_2)$ , le bloc  $j_2$  se décompose sur  $\pi_2 \dots \pi_n$ . On peut représenter la relation  $\prec$  par un graphe orienté acyclique, noté  $G_{\prec}(\pi, j_1)$ , enraciné en  $j_1$ , comme dans la figure 2. Les blocs qui étiquettent les sommets du niveau

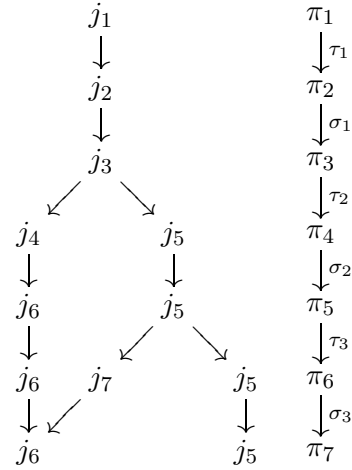


FIGURE 2 – Représentation d'un bloc qui reste grand sur un chemin  $\pi$ .

$i$  du graphe appartiennent tous à  $\pi_i$ . À chaque niveau, les fils d'un sommet  $i$  sont les blocs par lesquels  $i$  peut être continué. À la dernière transition, les blocs  $j_6$  et  $j_7$  sont tous les deux continués par le bloc  $j_6$ , donc pointent vers le même sommet (on ne duplique pas les sommets). Alors le bloc  $j_1$  se décompose sur ce chemin si et seulement si la hauteur de ce graphe est strictement inférieure au nombre de transitions de  $\pi$ . On formalise cette idée dans le lemme suivant.

**Lemme 3.9.** *Soit  $\pi : \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$  un chemin de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  avec  $|\pi|_{time} = p$ . Alors tout bloc de  $\pi_1$  de taille supérieure ou égale à  $2p + 2$  reste grand sur  $\pi$ .*

### 3.1.2 $\Delta$ -distance entre deux états.

On dit que les horloges apparaissent dans le même ordre dans deux mots  $c$  et  $c'$  s'il existe  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  tels que  $c = \Delta^{n_0} x_{i_1} \Delta^{n_1} \dots x_{i_m} \Delta^{n_m}$  et  $c' = \Delta^{n'_0} x_{i_1} \Delta^{n'_1} \dots x_{i_m} \Delta^{n'_m}$  pour un certain  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} \subseteq \mathcal{X}$ . Afin de comparer les états de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ , on définit une distance d'édition entre deux mots du ruban  $c$  et  $c'$ , appelée la  $\Delta$ -distance et notée  $d_{\Delta}(c, c')$ , tels que  $c$  et  $c'$  contiennent le même nombre de  $\Delta$  et les horloges y apparaissent dans le même ordre. Pour une telle paire de mots, on appelle  $\vec{k} = (k_0, k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$  un *vecteur de correction* si  $n'_j \leq n_j + k_{i_j}$  pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ . On remarquera que les  $k_{i_j}$  sont tous positifs dans cette définition, donc si un bloc  $i_j$  de  $c$  est en excès par rapport à  $c'$  alors on aura simplement  $k_{i_j} = 0$ . Ainsi, un vecteur de correction pour la paire  $(c, c')$  n'est pas toujours un vecteur de correction pour  $(c', c)$ . La  $\Delta$ -distance de  $c$  et  $c'$  est alors le plus petit entier  $K$  tel qu'il existe un vecteur de correction pour  $(c, c')$  tel que  $\|\vec{k}\|_1 = K$ .

La fonction  $d_{\Delta}$  est bien une distance : on a clairement  $d_{\Delta}(c, c') = 0$  ssi  $c = c'$  ;  $d_{\Delta}$  est aussi symétrique (avec un vecteur de correction différent pour les deux cas) car le nombre de  $\Delta$  dans les états comparés est le même ; enfin il est facile de voir qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire. On notera aussi abusivement  $d_{\Delta}((d, c), (d', c'))$ .

Le lemme suivant établit le lien entre la  $\Delta$ -distance de deux états de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  et la distance réelle entre deux états concrets équivalents à ces derniers.

**Lemme 3.10.** *Soient  $q$  et  $q'$  deux états de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  tels que  $N \geq X$ , et  $[q] \subseteq [q']$ , et deux états  $(l, v)$  et  $(l, v')$  de  $\mathcal{A}$  tels que  $(l, v) \prec_{abs} q$  et  $(l, v') \prec_{abs} q'$ . Si  $d_{\Delta}(q, q') \leq \frac{N}{X} - 2$ , alors  $d_{\infty}(v, v') < \frac{1}{X}$ .*

On reprend le lemme 16 de [10], qui implique le corollaire 3.12 par le lemme 3.10.

**Lemme 3.11** (Lemme 16, [10]). *Soient  $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{R}^X$  deux régions fermées telles que  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ . Alors  $d_{\infty}(R_1, R_2) \geq \frac{1}{X}$ .*

**Corollaire 3.12.** *Si  $d_{\Delta}((d, c), (d', c')) \leq N/X - 2$ , alors  $[(d, c)] \cap [(d', c')] \neq \emptyset$ .*

### 3.1.3 Nous échangeons vos chemins anciens contre des chemins neufs exacts

Un chemin est dit *exact* si les invariants et les gardes lors des transitions discrètes sont vérifiées exactement. Soit  $N_0 = 2W + 2$ , où  $W$  est le nombre de régions de  $\mathcal{A}$ . Un

bloc est dit *petit* s'il est de taille  $\{-1, 0, 1\}$ , *moyen* s'il est de taille  $\{2, \dots, N_0 - 1\}$ , et *grand* s'il est de taille  $N_0$  ou plus.

Étant donné un chemin  $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$  de longueur bornée, on va construire, dans le lemme 3.14, un chemin exact  $\pi' = \pi'_1 \dots \pi'_n$  sur la même trace non-temporisée, tel que  $d_\Delta(\pi_i, \pi'_i)$  est borné pour tout  $1 \leq i \leq n$ . L'idée de la construction est la suivante. Pour tout  $i$ , si un bloc petit ou moyen de  $\pi_i$  se décompose dans la suite du chemin, alors ce bloc sera choisi de taille  $-1$  dans  $\pi'_i$ , et les autres blocs de  $\pi'_i$  seront au moins aussi grands que dans  $\pi_i$ . L'excès de chaque bloc de  $\pi'_i$  par rapport à  $\pi_i$  sera noté par un vecteur de correction  $\vec{k}^{(i)}$ .

Le lemme suivant montre l'intérêt de choisir certains blocs de taille  $-1$  dans  $\pi'$  pour la satisfaction exacte des gardes.

**Lemme 3.13.** *Soient  $q$  et  $q'$  deux états de  $\mathcal{C}_A(\Delta^N)$  tels que  $[q'] \subseteq [q]$  et tout petit bloc de  $q$  est de taille  $-1$  dans  $q'$ . Alors, si  $q$  vérifie une formule  $g$ ,  $q'$  le vérifie exactement.*

Soit  $\pi : \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$  un chemin fini de  $\mathcal{C}_A(\Delta^N)$  avec  $N \geq XN_0$ , qui contient  $p$  transitions discrètes. On va définir un état à partir de  $\pi_i$ , noté  $H(\pi, i, n)$ , où tout bloc petit ou moyen et qui se décompose sur  $\pi_i \dots \pi_n$  est de taille  $-1$ . Écrivons  $\pi_i = (d, \vec{n})$ . L'état  $H(\pi, i, n) = (d', \vec{n}')$  est obtenu comme suit. Soit  $\{j_1, \dots, j_k\}$  l'ensemble des blocs petits ou moyens de  $\pi_i$  qui se décomposent sur  $\pi_i \dots \pi_n$ . On pose  $n'_{j_1} = \dots = n'_{j_k} = -1$ . Pour  $j_0$ , le grand bloc de  $\pi_i$  d'indice minimal, qui existe par le choix de  $N$ , on pose  $n'_{j_0} = n_{j_0} + n_{j_1}^+ + \dots + n_{j_k}^+$ . On peut remarquer que la région fermée  $[H(\pi, i, n)]$  est indépendante du choix de  $j_0$ , et que  $[H(\pi, i, n)] \subseteq [\pi_i]$  par la propriété 2.3. Pour tout état  $\pi'_i$ ,  $[\pi'_i] \subseteq [H(\pi, i, n)]$  signifie que tout bloc petit ou moyen de  $\pi_i$  qui se décompose sur le chemin  $\pi_i \dots \pi_n$  est de taille  $-1$  dans  $\pi'_i$ . Comme  $\pi_i$  contient au moins un grand bloc, on a  $d_\Delta(\pi_i, H(\pi, i, n)) \leq XN_0$ .

**Lemme 3.14.** *Soit  $\pi : \pi_1 \dots \pi_n$  un chemin de  $\mathcal{C}_A(\Delta^N)$  avec  $N \geq (X + 1)N_0$ , sur une trace non-temporisée  $\delta$  avec  $|\pi|_{\text{time}} \leq N_0/2$ . Alors il existe un chemin exact  $\pi' : \pi'_1 \dots \pi'_n$  sur  $\delta$ , avec  $\pi'_1 = H(\pi, 1, n)$ , et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $[\pi'_i] \subseteq [H(\pi, i, n)]$  et  $d_\Delta(\pi_i, \pi'_i) \leq (X + 1)N_0$ .*

*Démonstration.* On construit les  $\pi'_i$  par récurrence sur  $i \geq 1$ . Ils vont vérifier les propriétés suivantes :

- $[\pi'_i] \subseteq [\pi_i]$ ,
- pour tout  $0 \leq j \leq m$ , si le bloc  $j$  se décompose sur  $\pi_i \dots \pi_n$ , alors  $n'_j = -1$ ,
- $\pi'_i$  est de  $\Delta$ -distance bornée de  $\pi_i$  avec un vecteur de correction  $\vec{k}^{(i)}$  pour la paire  $(\pi_i, \pi'_i)$ , pour lequel on va donner un majorant.

$H(\pi, 1, n)$  vérifie les conditions. On a  $\|\vec{k}^{(1)}\|_1 \leq XN_0$  car il y a au moins un grand bloc dans  $\pi_1$ . Supposons  $\pi'$  construit jusqu'à l'étape  $i$ . On note  $\pi_i = (d, \vec{n})$  et  $\pi'_i = (d', \vec{n}')$ . On va définir  $\pi'_{i+1}$  en distinguant les cas selon la transition de  $\pi_i$  à  $\pi_{i+1}$ .

► *Passage de temps.* Soit  $\tau \geq 0$  tel que  $\pi_i \xrightarrow{\tau} \pi_{i+1}$ . Si une horloge est entière dans  $\pi_{i+1}$ , alors il existe  $\tau' \geq 0$  tel que, quand appliqué à partir de  $\pi'_i$ , la même horloge devient entière, puisque les horloges apparaissent dans le même ordre dans  $\pi_i$  et  $\pi'_i$ . Supposons qu'aucune horloge n'est entière dans  $\pi_{i+1}$ . Quitte à découper le passage de

temps en deux, on peut supposer qu'aucune horloge ne devient entière lors de ce passage de temps, donc les horloges apparaissent dans le même ordre dans  $\pi_i$  et  $\pi_{i+1}$ . Pour définir  $\pi'_{i+1}$ , on distingue plusieurs cas.

1. Si les blocs  $i_0$  et  $i_m$  restent grands sur  $\pi_{i+1} \dots \pi_n$  alors on effectue un passage de temps de durée  $\tau' \leq \tau$  à partir de  $\pi'_i$ , de telle sorte que l'excès du bloc  $i_0$  dans  $\pi'_{i+1}$  n'augmente pas par rapport à  $\pi'_i$ , et l'excès du bloc  $i_m$  est conservé. On a  $\|k^{(i+1)}\|_1 = \|k^{(i)}\|_1$ .
2. Si le bloc  $i_0$  se décompose dans  $\pi_{i+1} \dots \pi_n$  et le bloc  $i_m$  y reste grand alors on effectue  $\tau' = 0$ . Si on note par  $n''_0$  la taille du bloc  $i_0$  de  $\pi_{i+1}$ , le bloc  $i_m$  a un excès de  $n''_0$  dans  $\pi'_{i+1}$  par rapport à  $\pi_{i+1}$ . On pose alors  $k^{(i+1)}_{i_m} = k^{(i)}_{i_m} + n''_0$ ; et  $k^{(i+1)}_0 = 0$ . Les autres composantes du vecteur ne changent pas. On a donc  $\|k^{(i+1)}\|_1 \leq \|k^{(i)}\|_1 + n''_0$ .
3. Si le bloc  $i_m$  se décompose sur  $\pi_{i+1} \dots \pi_n$ , alors il est de taille  $-1$  dans  $\pi'_i$ , et en prenant  $\tau' = 0$ , on obtient  $\pi'_{i+1} = \pi'_i$ . Dans ce cas, le bloc  $i_m$  est toujours de taille  $-1$  dans  $\pi'_{i+1}$  et le bloc  $i_0$  ne change pas de taille donc les excès sont conservés. La taille des autres blocs est conservée donc  $\|k^{(i+1)}\|_1 = \|k^{(i)}\|_1$ .

L'état d'arrivée  $\pi'_{i+1}$  satisfait bien les trois conditions dans tous les cas.

► *Transitions discrètes.* Soit  $(l, l', \sigma, g, R)$  la  $i$ -ème transition. Par hypothèse de récurrence, la garde  $g$  et l'invariant  $\mathcal{I}(l)$  sont vérifiés exactement dans  $\pi'_i$  par la proposition 3.13. Soit  $\pi'_{i+1}$  l'état d'arrivée en appliquant  $\sigma$  en  $\pi'_i$ . On a bien  $[\pi'_{i+1}] \subseteq [\pi_{i+1}]$  car  $[\pi'_i] \subseteq [\pi_i]$ . Lors de la remise à zéro d'une horloge  $x_{i_j}$ , les blocs  $i_j$  et  $i_{j-1}$  sont fusionnés, et le bloc  $i_0$  devient le bloc  $i_j$ . Ainsi les blocs ne peuvent que grandir, donc tout bloc qui se décompose dans  $\pi_{i+1}$  est de taille  $-1$  dans  $\pi'_{i+1}$ . Quand deux blocs  $i_j$  et  $i_{j-1}$  sont fusionnés lors d'une remise à zéro, l'excès de  $i_j$  est récupéré par le bloc  $i_{j-1}$ ; l'excès de  $i_0$  est récupéré par le bloc  $i_{j-1}$ ; et le bloc  $i_0$  est de taille  $-1$  dans  $\pi_{i+1}$  et  $\pi'_{i+1}$ . Donc la norme du vecteur de correction ne change pas. L'état  $\pi'_{i+1}$  vérifie donc les trois conditions demandées.

On montre maintenant que la  $\Delta$ -distance entre les états de  $\pi$  et  $\pi'$  restent bornée comme voulu. Il suffit de montrer que  $\|\vec{k}^{(n)}\|_1 \leq \|\vec{k}^{(1)}\|_1 + N_0$ , ce qui implique  $\|\vec{k}^{(i)}\|_1 \leq (X+1)N_0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  puisque  $\|\vec{k}^{(1)}\|_1 \leq XN_0$ . La norme du vecteur de correction est augmentée d'un nombre  $n''_0 > 0$  seulement dans le cas 2 lors d'un passage de temps. Mais dans ce cas, un bloc de taille au moins  $n''_0$  se décompose dans la suite du chemin, donc par le lemme 3.9, il y a au moins  $\lfloor n''_0/2 \rfloor$  passages de temps du cas 3 dans la suite du chemin, lors duquel la norme du vecteur de correction ne change pas.  $\square$

Un chemin exact peut être suivi à partir de tout état de la fermeture de la région de départ.

**Lemme 3.15.** *Soit  $\pi : \pi_1 \dots \pi_n$  un chemin exact sur une trace non-temporisée  $T$ . Alors pour tout état  $\pi'_1$  qui vérifie  $[\pi'_1] \subseteq [\pi_1]$ , il existe un chemin exact  $\pi'_1 \dots \pi'_n$  sur la même trace non-temporisée tel que  $[\pi'_i] \subseteq [\pi_i]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

On a aussi la même propriété en arrière.

**Lemme 3.16.** Soit  $\pi : \pi_1 \dots \pi_n$  un chemin exact sur une trace non-temporisée  $T$ . Alors pour tout état  $\pi'_n$  qui vérifie  $[\pi'_n] \subseteq [\pi_n]$ , il existe un chemin exact  $\pi'_1 \dots \pi'_n$  de trace non-temporisée  $T$  tel que  $[\pi'_i] \subseteq [\pi_i]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Le lemme suivant est une adaptation du lemme 29 de [10]. La preuve, donnée à l'annexe, est néanmoins astucieuse et nécessite plusieurs étapes. Un chemin exact  $q_1 q_2 \dots q_n$  de  $\mathcal{C}_A(\Delta^N)$  est dit un *cycle de progrès* si  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q_1) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_n)$  et toute horloge présente dans  $q_1$  y est remise à zéro au moins une fois.

**Lemme 3.17.** Soient  $N > 0$  et  $\pi : \pi_1 \dots \pi_n$  un cycle de progrès dans  $\mathcal{C}_A(\Delta^N)$  sur une trace non-temporisée  $T$ . Alors pour tout  $\pi'_n$  tel que  $[\pi'_n] \subseteq [\pi_n]$ , il existe un chemin exact  $\pi' : \pi_1 \dots \pi'_n$  sur une trace de  $\tilde{T}$ .

### 3.1.4 Preuve du lemme de pompage

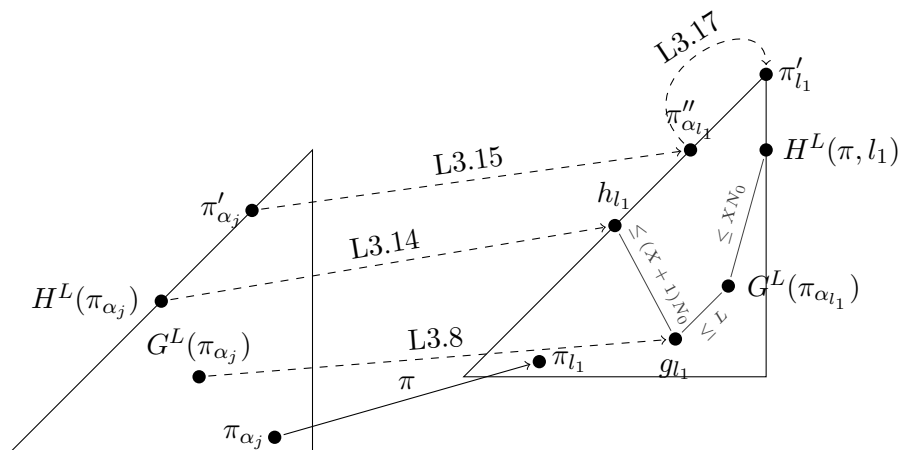


FIGURE 3 – Preuve du lemme 3.3. Les deux triangles représentent des régions fermées. Les trois côtés, les sommets et l'intérieur sont des sous-régions. La preuve construit les chemins pointillés un par un de bas en haut.

*Preuve du lemme 3.3.* On démontre le résultat pour  $1 \leq L \leq XN_0 - 2$ . Si  $L > XN_0 - 2$ , on pourra répéter cette construction. On suppose l'hypothèse de cycles de progrès. Soit  $N_1 \geq 4X^2N_0$ . Soit un chemin infini  $\pi = (\pi_i)_{i \geq 1}$  de  $\mathcal{C}_A(\Delta^{N_1})$  sur une trace non-temporisée  $(T_i)_{i \geq 1}$  avec  $\pi_1 = (d_0, \mathcal{X} \parallel \Delta^{N_1})$ . Les chemins finis se traitent de manière similaire.

Pour tout  $i \geq 1$ , soit  $p_i \geq 1$  tel que la trace non-temporisée du chemin  $\pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{i+p_i}$  contient  $N_0/2$  passages de temps. On définit  $G^L(\pi, i, i+p_i)$  comme l'état obtenu à partir de  $\pi_i$  où on a inséré  $\Delta^L$  dans un bloc (par ex. d'indice minimal) de  $\pi_i$  qui reste grand sur  $\pi_i \dots \pi_{i+p_i}$ . On définit également  $H^L(\pi, i, i+p_i)$  comme l'état obtenu à partir de  $H(\pi, i, i+p_i)$  (voir la définition précédant le lemme 3.14), en insérant  $\Delta^L$  dans un bloc qui reste grand sur  $\pi_i \dots \pi_{i+p_i}$ . On remarque que  $H^L(\pi, i, i+p_i)$  est bien défini car tout



état de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{N_1})$  contient un grand bloc puisque  $N_1 \geq (X+1)N_0$  et que tout grand bloc reste grand sur ce chemin de longueur  $p_i$  par le lemme 3.9. Alors tout petit bloc de  $H^L(\pi, i, i+p_i)$  est de taille  $-1$ , et tout bloc moyen ou grand reste grand sur  $\pi_i \dots \pi_{i+p_i}$ . On a aussi  $d_{\Delta}(H^L(\pi, i, i+p_i), G^L(\pi, i, i+p_i)) \leq XN_0$  par construction.

On va construire un chemin  $\pi' = (\pi'_i)_{i \geq 1}$  sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{N_1+L})$  sur une trace non-temporisée  $T' \in \tilde{T}$  avec  $\pi'_1 = (d_0, \mathcal{X} \parallel \Delta^{N_1+L})$  tel qu'il existe  $1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$  avec  $[\pi'_{\alpha_i}] \subseteq [H^L(\pi, \alpha_i, \alpha_i + p_{\alpha_i})]$  et  $\text{loc}(\pi'_{\alpha_i}) \dots \text{loc}(\pi'_{\alpha_{i+1}-1}) \in (\text{loc}(\pi_{\alpha_i}) \dots \widetilde{\text{loc}(\pi_{\alpha_{i+1}-1)})$  pour tout  $i \geq 1$ .

On pose  $\pi'_{\alpha_1} = \pi'_1 = H(\pi_1, 1, 1+p_1)$ . Alors  $\pi_1$  est l'état initial de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  et toutes les horloges y sont entières, donc  $\pi'_1$  est bien l'état initial de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{N+L})$ . Supposons  $\pi'_1 \dots \pi'_{\alpha_j}$  déjà construit, avec  $[\pi'_{\alpha_j}] \subseteq [H^L(\pi, \alpha_j, \alpha_j + p_{\alpha_j})]$ . On considère le facteur fini  $\pi_{\alpha_j} \pi_{\alpha_j+1} \dots \pi_{\alpha_j+p_{\alpha_j}}$ . Par le lemme 3.8, il existe un chemin  $g : G^L(\pi, \alpha_j, \alpha_j + p_{\alpha_j}) = g_{\alpha_j} g_{\alpha_j+1} \dots g_{\alpha_j+p_{\alpha_j}}$  sur la trace  $T_{\alpha_j} \dots T_{\alpha_j+p_{\alpha_j}}$ , tel que  $g_l = \pi_l[z_l \leftarrow \Delta^L]$  pour tout  $l \in \{\alpha_j, \dots, \alpha_j + p_{\alpha_j}\}$  pour certaines horloges  $z_l$ . Le lemme 3.14 appliqué au chemin  $g$  donne un chemin exact  $h_{\alpha_j} h_{\alpha_j+1} \dots h_{\alpha_j+p_{\alpha_j}}$  avec  $h_{\alpha_j} = H^L(\pi, \alpha_j, \alpha_j + p_{\alpha_j})$ , sur la même trace non-temporisée, où  $d_{\Delta}(g_l, h_l) \leq (X+1)N_0$  et  $[h_l] \subseteq [H^L(\pi, l, \alpha_j + p_{\alpha_j})]$  pour tout  $l \in \{\alpha_j, \alpha_j + 1, \dots, \alpha_j + p_{\alpha_j}\}$ . Comme ce chemin contient au moins  $N_0/2 - 1 \geq W$  transitions discrètes, il existe  $\alpha_j \leq l_0 < l_1 \leq \alpha_j + p_{\alpha_j}$  tel que  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(h_{l_0}) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(h_{l_1})$  et il y a une transition discrète entre les instants  $l_0$  et  $l_1$ . Alors la suite des régions  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(h_{l_0}) \text{Val}_{\mathcal{X}}(h_{l_0+1}) \dots \text{Val}_{\mathcal{X}}(h_{l_1})$  est un cycle de progrès. On a  $d_{\Delta}(h_{l_1}, H^L(\pi, l_1, l_1 + p_{l_1})) \leq (3X+1)N_0 - 2$  en appliquant l'inégalité triangulaire aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} d_{\Delta}(h_{l_1}, g_{l_1}) &\leq (X+1)N_0 && \text{par le lemme 3.14,} \\ d_{\Delta}(g_{l_1}, G^L(\pi, l_1, l_1 + p_{l_1})) &\leq L \leq XN_0 - 2 && \text{par le lemme 3.8,} \\ d_{\Delta}(G^L(\pi, l_1, l_1 + p_{l_1}), H^L(\pi, l_1, l_1 + p_{l_1})) &\leq XN_0 && \text{voir plus haut.} \end{aligned}$$

Donc  $[h_{l_1}] \cap [H^L(\pi, l_1, l_1 + p_{l_1})] \neq \emptyset$  par le corollaire 3.12, puisque  $(3X+1)N_0 - 2 \leq N_1/X - 2 = 4XN_0 - 2$ . Soit  $\pi'_{l_1} \in [h_{l_1}] \cap [H^L(\pi, l_1, l_1 + p_{l_1})]$ . Par le lemme 3.15, on a  $\pi'_{\alpha_j} \rightarrow^* \pi'_{l_1}$  tel que  $[\pi'_{l_1}] \subseteq [h_{l_1}]$ , sur la même trace non-temporisée que  $h$ . Maintenant, en appliquant le lemme 3.17, on obtient  $\pi''_{l_1} \rightarrow^* \pi'_{l_1}$  en répétant la trace non-temporisée du cycle  $T_{l_0} \dots T_{l_1}$ . On choisit  $\alpha_{j+1} = l_1$  et conclut par récurrence. Une étape de la récurrence est illustrée dans la figure 3.  $\square$

### 3.2 Lemme de pompage sans hypothèse de cycles de progrès

Si l'automate temporisé  $\mathcal{A}$  ne vérifie pas l'hypothèse de cycles de progrès alors  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  peut contenir des *cycles faibles*, i.e. des chemins  $q_1 q_2 \dots q_n$  où  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q_1) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_n)$  et au moins une horloge présente dans  $q_1$  n'est pas remise à zéro. On commence par étudier la forme des cycles faibles, et on montre que tout cycle faible peut être mis sous une forme normale (définition 3.19).

**Cycles faibles sous forme normale** Un *chemin faible* sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  est un chemin sur lequel au moins une horloge n'est pas remise à zéro, et aucune horloge ne change

de valeur entière, sauf qu'éventuellement la dernière horloge du ruban peut devenir (et rester) entière. Une horloge est dite *active* sur un chemin faible si elle y est remise à zéro au moins une fois, *inactive* sinon. L'exemple suivant illustre un chemin faible.

**Exemple 3.18.** *Le chemin suivant est un chemin faible sur  $\mathcal{C}_A(\Delta^{14})$ . Exceptionnellement, on y représente seulement les états de contrôles, donc les valeurs entières des horloges sont implicites. Les horloges  $x$  et  $y$  sont actives alors que  $z$  est inactive. Par définition, si on ajoute un passage de temps non trivial à ce chemin, alors ce ne sera plus un chemin faible puisque la valeur de  $z$  aura dépassé sa partie entière par excès.*

$$\begin{array}{ccc} l_1, x \parallel \Delta y \Delta^3 z \Delta^{10} & \xrightarrow{4} & l_1, \parallel \Delta^3 x \Delta y \Delta^3 z \Delta^7 & \xrightarrow[y:=0]{} & l_2, y \parallel \Delta^3 x \Delta^4 z \Delta^7 & \xrightarrow{9} \\ l_2, z \parallel \Delta^7 y \Delta^3 x \Delta^4 & \xrightarrow[x:=0]{} & l_3, \langle xz \rangle \parallel \Delta^7 y \Delta^7 & & & \end{array}$$

Si un chemin faible  $\pi$  se termine dans un état où les horloges sont ordonnées par  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ , dont  $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$  sont actives,  $\pi$  s'écrit sous la forme suivante.

$$\pi = \pi_{i_r} \rho_{i_r} \pi_{i_{r-1}} \rho_{i_{r-1}} \pi_{i_{r-2}} \dots \pi_{i_1} \rho_{i_1} \pi', \quad (3)$$

où pour tout  $j \in \{i_1, \dots, i_r\}$ ,  $\rho_j$  est l'état d'arrivée de la dernière transition de  $\pi$  qui remet  $x_{i_j}$  à zéro, et  $\pi_j$  est un chemin quelconque. Dans la suite, quand on écrira l'ensemble des horloges actives comme  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$ , il sera sous-entendu que  $i_1, \dots, i_r$  est l'ordre dans lequel apparaissent ces horloges dans l'état d'arrivée du chemin faible.

Un *cycle faible* est un chemin faible  $q \rightarrow^* q'$  tel que  $\text{loc}(q) = \text{loc}(q')$  et les horloges ont le même ordre au sens large dans le ruban de  $q$  et de  $q'$ . Si  $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  est l'ensemble des horloges actives sur un cycle faible, alors les horloges de  $A$  sont toutes à gauche de  $x_{i_{r+1}}$  tout le long du cycle faible. Pour des raisons de simplicité, on considère les cycles faibles dont les deux extrémités sont des états où au moins une horloge est entière (donc  $\pi'$  est vide dans (3)). Il ne s'agit pas d'une restriction importante puisqu'en découpant les passages de temps on peut mettre tout cycle faible sous cette forme.

Soit  $K_0 = 2|\mathcal{L}| \cdot \max(4^X, X!) + 5$ . Soit  $\pi$  un cycle faible, décomposé comme dans (3). On note  $\delta_j$  la trace du chemin  $\pi_j$  pour tout  $j$ , et  $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  l'ensemble des horloges actives. On définit  $\text{Pompables}(\pi) = \{j \in A : \text{temps}_\Delta(\pi_j) \geq K_0 \text{ ou } \exists \tau \in \delta_j, \text{temps}_\Delta(\tau) \geq 2\}$ .

**Definition 3.19.** *Soit  $\pi : q_1 \rightarrow^* q_2$  un cycle faible et  $\pi = \pi_{i_r} \rho_{i_r} \dots \pi_{i_1} \rho_{i_1}$  une décomposition comme dans (3), avec  $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  les horloges actives. Alors  $\pi$  est sous forme normale si a) tout petit bloc de  $q_1$  et  $q_2$  est de taille  $-1$ ; b)  $\text{Pompables}(\pi) \neq \emptyset$ ; c) pour tout  $j \in A \setminus \text{Pompables}(\pi)$ , on a  $\text{temps}(\pi_{i_j}) = 0$ .*

On montre que tout chemin borné peut être transformé en un chemin *quasi-exact* proche, à savoir un chemin dont tous les cycles faibles sont sous forme normale, et toutes les autres transitions sont exactes. On définit une nouvelle écriture des chemins de  $\mathcal{C}_A(\Delta^N)$ , où chaque cycle faible est vu comme une seule transition. L'idée de la preuve du lemme de pompage est alors de démontrer, en isolant les cycles faibles de cette manière et en redéfinissant la longueur des chemins et la notion de rester grand

pour cette nouvelle écriture, que tout chemin assez long contient un cycle quasi-exact de progrès, à savoir un cycle quasi-exact sur lequel toute horloge présente est remise à zéro au moins une fois. Ainsi la preuve du lemme de pompage suit pas à pas les mêmes étapes que la sous-section 3.1, mais en adaptant tout résultat intermédiaire en présence des cycles faibles. La preuve détaillée est présentée dans l'annexe B.

## 4 Automate des régions augmenté

On définit  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$ , l'automate des régions de  $\mathcal{A}$  augmenté par des nouvelles transitions. On démontre qu'une exécution infinie de  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$  vérifie une propriété de co-Büchi donnée si et seulement s'il existe une exécution infinie de  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$  qui la vérifie, pour un certain  $\delta > 0$  (théorème 4.1). Il s'agit d'une généralisation de l'automate des régions augmenté de [4]. Cependant, notre preuve de correction est basée sur les techniques qu'on a introduit dans les sections précédentes et est relativement simple.

Pour définir  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$ , on procède en deux étapes : on définit d'abord  $\mathcal{R}_w(\mathcal{A})$  en ajoutant à  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  les  $w$ -transitions qui correspondent aux cycles faibles, ensuite on définit  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$  à partir de  $\mathcal{R}_w(\mathcal{A})$  en ajoutant les  $\gamma$ -transitions qui correspondent aux cycles quasi-exacts de progrès. Les états de l'automate  $\mathcal{R}_w(\mathcal{A})$  sont les états de  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ , i.e. les paires  $(l, R)$  où  $l$  est un état de contrôle,  $R$  une région. Les transitions de  $\mathcal{R}_w(\mathcal{A})$  sont les transitions de  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ , et les transitions de la forme  $(l, R) \rightarrow_{w(A,L)} (l', R')$  pour tous  $(l, R)$  et  $(l', R')$  tels qu'il existe un cycle faible sous forme normale  $q_1 \rightsquigarrow q_2$  de  $\mathcal{C}_\mathcal{A}(\Delta^{2N_1})$ , de longueur inférieure à  $|\mathcal{L}|^2 X K_0$  (voir l'annexe C), avec  $\text{Val}_\mathcal{X}(q_1) = R$ ,  $\text{loc}(q_1) = l$ ,  $\text{Val}_\mathcal{X}(q_2) = R'$  et  $\text{loc}(q_2) = l'$ , et  $A \subseteq \mathcal{X}$  l'ensemble des horloges actives et  $L \subseteq \mathcal{L}$  l'ensemble des états de contrôles visités lors de ce cycle faible.

On dit qu'un cycle  $(l_1, R_1) \dots (l_1, R_1)$  de  $\mathcal{R}_w(\mathcal{A})$  est de progrès si toute horloge présente dans  $R_1$  y est remise à zéro au moins une fois, soit lors des transitions ordinaires, soit à l'intérieur des cycles faibles  $\rightarrow_{w,A}$ . L'automate  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$  est défini sur le même ensemble d'états que  $\mathcal{R}_w(\mathcal{A})$  et contient toutes ses transitions. En plus, on définit une transition  $R \rightarrow_{\gamma(L)} R'$  pour toutes régions  $R$  et  $R'$ , dès qu'il existe une région  $R''$  telle que  $R \cup R' \subseteq [R'']$  et  $R''$  se trouve dans un cycle simple de progrès de  $\mathcal{R}_w(\mathcal{A})$ .

On définit les chemins de  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$  habituellement, en tenant en compte des nouvelles transitions. On suppose que toute  $w$ -transition  $w(A, L)$  (resp.  $\gamma$ -transition  $\gamma(L)$ ) est étiquetée par les éléments de  $L$  dans un ordre quelconque. (En ce qui concerne les propriétés de co-Büchi, l'ordre choisi pour ces états de contrôle n'a pas d'importance). L'état initial est  $(l_0, \bar{0})$ , où  $l_0$  est l'état initial de  $\mathcal{A}$ , et  $\bar{0}$  est la région où toutes les horloges valent 0.

**Théorème 4.1.** *Soit  $\phi$  une propriété de co-Büchi. Alors,*

$$\mathcal{A} \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A}) \models \phi.$$

L'automate  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$  peut être construit à la volée en utilisant un espace polynomial non-déterministe, et l'existence d'un chemin infini qui viole la propriété  $\phi$  peut être décidée en PSPACE. Cela est optimal puisque ce problème est déjà PSPACE-complet ([4]) pour les automates temporisés vérifiant l'hypothèse de cycles de progrès.

**Théorème 4.2.** *Le problème du model-checking robuste des propriétés de co-Büchi pour les automates temporisés généraux est PSPACE-complet.*

## Références

- [1] Rajeev Alur and David L. Dill. A theory of timed automata. *Theoretical Computer Science*, 126 :183–235, 1994.
- [2] E. Asarin, O. Maler, A. Pnueli, and J. Sifakis. Controller synthesis for timed automata. In *In Proc. Symposium on System Structure and Control*, pages 469–474. Elsevier, 1998.
- [3] Patricia Bouyer, Nicolas Markey, Joël Ouaknine, and James Worrell. The cost of punctuality. In *Proceedings of the 22nd Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'07)*, pages 109–118, Wrocław, Poland, July 2007. IEEE Computer Society Press.
- [4] Patricia Bouyer, Nicolas Markey, and Pierre-Alain Reynier. Robust model-checking of linear-time properties in timed automata. In Jose R. Correa, Alejandro Hevia, and Marcos Kiwi, editors, *Proceedings of the 7th Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN'06)*, volume 3887 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 238–249, Valdivia, Chile, March 2006. Springer.
- [5] Patricia Bouyer, Nicolas Markey, and Pierre-Alain Reynier. Robust analysis of timed automata *via* channel machines. In Roberto Amadio, editor, *Proceedings of the 11th International Conference on Foundations of Software Science and Computation Structures (FoSSaCS'08)*, volume 4962 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 157–171, Budapest, Hungary, March–April 2008. Springer.
- [6] Marius Bozga, Conrado Daws, Oded Maler, Alfredo Olivero, Stavros Tripakis, and Sergio Yovine. Kronos : A model-checking tool for real-time systems. In *CAV '98 : Proceedings of the 10th International Conference on Computer Aided Verification*, pages 546–550, London, UK, 1998. Springer-Verlag.
- [7] A. Collomb-Annichini and M. Sighireanu. Parameterized reachability analysis of the ieee 1394 root contention protocol using trex. In *Proceedings of the workshop on real-time tools (RT-TOOLS'2001)*, 2001.
- [8] Pedro R. D'Argenio, Joost-Pieter Katoen, Theo C. Ruys, and Jan Tretmans. Modelling and verifying a bounded retransmission protocol using uppaal. In Z. Brezocnik and T. Kapus, editors, *International Workshop on Applied Formal Methods in System Design*, pages 114–128, 1996.
- [9] Conrado Daws and Piotr Kordy. Symbolic robustness analysis of timed automata. In *In Proc. 4th Intl Conf. Formal Modeling and Analysis of Timed Systems (FORMATS'06)*, LNCS 4202, pages 143–155. Springer, 2006.
- [10] Martin De Wulf, Laurent Doyen, Nicolas Markey, and Jean-François Raskin. Robust safety of timed automata. *Formal Methods in System Design*, 33(1-3) :45–84, December 2008.
- [11] Kim G. Larsen, Paul Pettersson, and Wang Yi. Uppaal in a nutshell. *Int. Journal on Software Tools for Technology Transfer*, 1 :134–152, 1997.
- [12] Magnus Lindahl, Paul Pettersson, and Wang Yi. Formal design and analysis of a gear controller. In Bernhard Steffen, editor, *TACAS*, volume 1384 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 281–297. Springer, 1998.
- [13] Anuj Puri. Dynamical properties of timed automata. In *FTRTFT '98 : Proceedings of the 5th International Symposium on Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerant Systems*, pages 210–227, London, UK, 1998. Springer-Verlag.
- [14] Martin De Wulf, Laurent Doyen, and Jean-François Raskin. Almost asap semantics : From timed models to timed implementations. In Rajeev Alur and George J. Pappas, editors, *HSCC*, volume 2993 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 296–310. Springer, 2004.

## A Preuves de la sous-section 3.1

*Preuve du lemme 3.9.* Soit  $l$  un bloc de taille supérieure ou égale à  $2p + 2$  dans  $\pi_1$ . On étiquette chaque sommet  $i_j$  de  $G_{\prec}(\pi, l)$  par  $N(l) > 0$ , un minorant à la taille du bloc correspondant. On pose  $N(l) = 2p + 2$ . Supposons  $N(\cdot)$  défini jusqu'à un niveau  $k$ . Si la  $k$ -ième transition est une transition discrète  $\sigma$ , alors un sommet correspondant à un bloc  $i_j$  du niveau  $k$  est continué par le bloc  $i_s = \text{NR}_{\sigma}(i_j)$ , pour lequel on pose  $N(j') = N(i_s) + N(i_{s+1}) + \dots + N(i_j)$ . Donc la somme des étiquettes  $N$  est inchangée entre le niveau  $k$  et  $k + 1$ . Sinon, la  $k$ -ième transition est un passage de temps. Lors d'un passage de temps se terminant dans un état où une horloge est entière, les minorants des tailles des blocs sont conservés (en fusionnant éventuellement les blocs  $i_0$  et  $i_m$ ). Soit un passage de temps qui se termine dans un état où le bloc  $i_0$  est de taille positive ou nulle. On peut supposer qu'aucune horloge ne devient entière lors de ce passage de temps (quitte à le découper). Alors le niveau  $k + 1$  contient le bloc  $i_0$  (resp.  $i_m$ ) seulement s'il est de taille au moins 2. On étiquette le sommet  $i_0$  du niveau  $k + 1$  par sa taille. De même pour  $i_m$ .

D'après cette construction, la somme des étiquettes ne peut décroître entre deux niveaux successifs qu'au dernier passage de temps qui sépare deux transitions discrètes, donc au plus  $p$  fois. Cette somme est décrétement au plus de 2 à chaque passage de temps (dans le cas où les blocs  $i_0$  et  $i_m$  sont tous les deux de taille 1).  $\square$

*Preuve du lemme 3.10.* Supposons  $d_{\Delta}(q, q') \leq \frac{N}{X} - 2$ . Soit  $\vec{k}$  le vecteur de correction associé, et soit une horloge  $x \in \mathcal{X}$ . Comme  $[q] \subseteq [q']$ , les horloges satisfont les mêmes inégalités larges dans  $q$  et  $q'$ . Pour chaque bloc  $i_j$  qui se trouve à gauche de  $x$  dans  $q$ , on a  $n'_j \leq n_j + k_{i_j}$ , et la somme de ces  $k_{i_j}$  vaut au plus  $\frac{N}{X} - 2$ . Donc il peut y avoir au plus  $\frac{N}{X} - 2$  symboles de plus entre  $x$  et la tête du ruban dans  $c'$  que dans  $c$ .

Soit  $\delta$  une valuation des horloges  $\Delta_1, \dots, \Delta_N$  telles que  $\delta(\Delta_{i+1}) = \delta(\Delta_i) + \frac{1}{N}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ , et  $v \cup \delta$  vérifie la propriété (\*), et  $h((l, v \cup \delta)) = q$ . De même, soit  $\delta'$  vérifiant les hypothèses similaires avec  $h((l, v' \cup \delta')) = q'$ . Dans ces deux valuations, les  $\Delta_1, \dots, \Delta_N$  sont régulièrement distribuées donc le choix de  $\delta(\Delta_1)$  (resp.  $\delta'(\Delta_1)$ ) déterminent les autres  $\delta(\Delta_i)$  (resp.  $\delta'(\Delta_i)$ ). Donc il existe  $0 < \epsilon < \frac{1}{N}$  tel que  $\delta = \delta' + \epsilon$  ou  $\delta' = \delta + \epsilon$ . On montre que pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , on a  $|\{v(x)\} - \{v'(x)\}| < (\frac{N}{X} - 2)\frac{1}{N}$ . On pose  $\delta(\Delta_0) = 0$ . Soit  $x \in \mathcal{X}$  et soient  $i, i' \in \{0, 1, \dots, N\}$  maximaux tels que  $\delta(\Delta_i) \leq \{v(x)\}$ , et  $\delta(\Delta_{i'}) \leq \{v'(x)\}$  (ces inégalités sont strictes si  $i \geq 1$  et  $i' \geq 1$  respectivement). Comme expliqué plus haut, on a  $|i' - i| \leq \frac{N}{X} - 2$ , donc  $|\delta(\Delta_i) - \delta'(\Delta_{i'})| \leq \frac{|i' - i|}{N} + \epsilon \leq \frac{1}{X} - \frac{2}{N} + \epsilon$ . On a  $\{v(x)\} - \delta(\Delta_i) < \frac{1}{N}$  car  $\{v(x)\} < \delta(\Delta_{i+1})$  si  $i < N$  et  $\{v(x)\} < 1$  sinon, par maximalité de  $i$ . De même, on a  $v'(x) - \delta'(\Delta_{i'}) < \frac{1}{N}$ . On obtient par ces deux inégalités  $|(\{v(x)\} - \{v'(x)\}) - (\delta(\Delta_i) - \delta'(\Delta_{i'}))| < \frac{1}{N}$ . Donc  $|\{v(x)\} - \{v'(x)\}| < \frac{1}{X} - \frac{1}{N} + \epsilon < \frac{1}{X}$ .  $\square$

*Preuve du lemme 3.13.* Soit  $\phi$  une formule satisfaite par  $(d, c)$ . C'est clair si  $\phi$  est vérifiée exactement en  $(d, c)$  puisque  $[(d', c')] \subseteq [(d, c)]$ . Par hypothèse, toute horloge proche d'une valeur entière dans  $(d, c)$ , vaut cette valeur entière dans  $(d', c')$ . Alors  $\phi$  est satisfaite exactement en  $(d', c')$  puisque les gardes sont fermées.  $\square$

*Preuve du lemme 3.15.* On divise les passages de temps de  $\pi$  en plusieurs étapes, coupées aux instants où une horloge devient entière. Supposons donc qu'à chaque passage de temps de  $\pi$ , au plus une horloge arrive au bord du ruban (et remis à la tête du ruban). On construit  $\pi'$  sur la même trace non-temporisée. Il suffit donc de définir les valeurs des passages de temps et montrer que  $[\pi'_i] \subseteq [\pi_i]$ , ce qui implique que les gardes sont satisfaites dans  $\pi'$  puisque  $\pi$  est un chemin exact. Supposons  $\pi'_i$  construit et que la transition de  $\pi_i$  à  $\pi_{i+1}$  est un passage de temps. Si à la fin de ce passage de temps, l'horloge  $x_{i_m}$  a une valeur entière dans  $\pi_{i+1}$ , alors on effectue un passage de temps d'une durée suffisante (éventuellement de durée nulle) dans  $\pi'_i$  pour que  $x_{i_m}$  ait une valeur entière dans  $\pi'_{i+1}$ . On remarque que comme  $[\pi'_i] \subseteq [\pi_i]$ , si plusieurs horloges ont la même partie fractionnaire que  $x_{i_m}$  dans  $\pi_i$  alors il en est de même dans  $\pi'_i$ . On a donc  $[\pi'_{i+1}] \subseteq [\pi_{i+1}]$ . Si à la fin du passage de temps, l'horloge n'atteint pas le bord du ruban, alors on effectue un passage de temps nul dans  $\pi'$  et on aura toujours  $[\pi'_{i+1}] \subseteq [\pi_{i+1}]$ . Toute remise à zéro conserve également cette relation.  $\square$

## B Lemme de pompage dans le cas général

Pour démontrer le lemme de pompage en présence des cycles faibles, on étudie d'abord les *chemins faibles*, pour lesquels on montre un lemme d'itération (lemme B.4). On définit ensuite une décomposition des chemins de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  où les *cycles faibles* sont vus comme des suites de transitions atomiques (sous-section B.2), et on redéfinit la notion de rester grand et la longueur de chemin. Enfin on démontre le lemme de pompage, d'abord pour les chemins bornés (lemme B.7), ensuite pour les chemins infinis en suivant les idées de la section 3.1.

### B.1 Chemins faibles

Étant donné (3), on connaît la forme de l'état d'arrivée, comme le montre le lemme suivant.

**Proposition B.1.** *Soit  $\pi : (d, \vec{n}) \rightarrow^* (d', \vec{n}')$  un chemin faible et  $\pi = \pi_{i_r} \rho_{i_r} \dots \pi_{i_1} \rho_{i_1} \pi'$  une décomposition de  $\pi$  sous la forme (3). Alors  $n'_j = \text{temps}_{\Delta}(\pi_{i_j})$  pour tout  $j \in \{1, \dots, r-1\}$ ; et  $n'_{i_r} = n_{i_r} + (\text{left}_{\Delta}^{q_1}(x_{i_r}) + \text{temps}_{\Delta}(\pi_{i_r}))^+$ .*

Dans ce paragraphe, on considère les chemins faibles  $q_1 q_2 \dots q_n$  qui satisfont les deux conditions suivantes : si  $x_{i_{r+1}}$  est l'horloge inactive qui se trouve le plus à gauche dans le ruban de  $q_1$ , alors

- $\text{left}_{\Delta}^{q_1}(x_{i_{r+1}}) \geq 2$ ,
- $\text{right}_{\Delta}^{q_i}(x) \geq 2$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et tout  $1 \leq i \leq n$ .

On appellera les chemins faibles qui vérifient ces conditions *chemins faibles restreints*. Cette restriction permet de se concentrer seulement sur la tête du ruban car comme aucune horloge inactive ne se rapproche des bords du ruban, toute garde satisfaite inexactement est de la forme  $x \leq k$  ou  $x = k$ , où  $x$  est une horloge active. Toute autre garde satisfaite est satisfaite exactement. On démontre un lemme d'itération (Lemme B.4) pour

les cycles faibles restreints, après avoir établi quelques propriétés des chemins faibles plus généraux, dans les propositions suivantes.

Si on remplace les passages de temps d'un chemin faible par des passages de temps plus courts, toute garde satisfaite le long du chemin sera toujours satisfaite. La proposition suivante formalise cette idée.

**Proposition B.2.** *Soit  $\pi : q_1 q_2 \dots q_p$  un chemin faible sur une trace  $(\delta_i)_i$ , tel que  $\text{right}_{\Delta}^{q_i}(x) \geq 2$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et tout  $1 \leq i \leq p$ . Soit la trace  $(\delta'_i)_i$  obtenue à partir de  $(\delta_i)_i$  en remplaçant tout passage de temps de longueur  $\tau$  par un passage de temps  $\tau' \leq \tau$  quelconque. Alors le chemin faible  $\pi' : q_1 q'_2 \dots q'_p$  sur la trace  $(\delta'_i)_i$  vérifie  $[q'_i] \subseteq [q_i]$  pour tout  $1 \leq i \leq p$ .*

La proposition suivante montre qu'un chemin faible peut être modifié pour diminuer la taille des blocs actifs à l'état d'arrivée.

**Proposition B.3.** *Soit  $\pi : q_1 q_2 \dots q_p = (d, \vec{n})$  un chemin faible où  $\text{right}_{\Delta}^{q_i}(x) \geq 2$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et tout  $1 \leq i \leq p$ ; et  $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$  sont les horloges actives. Alors pour tout  $j \in \{i_1, \dots, i_{r-1}\}$ , il existe un chemin faible  $\pi' : q_1 q'_2 \dots q'_p = (d', \vec{n}')$  avec  $\text{untime}(\pi) = \text{untime}(\pi')$ ,  $[q'_p] \subseteq [q_p]$ , et tel que  $n'_j = -1$ ,  $n'_m = n_m + n_j^+$  et  $n'_i = n_i$  pour tout  $i \notin \{j, m\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\pi = \pi_r \rho_{i_r} \pi_{r-1} \rho_{i_{r-1}} \pi_{r-2} \dots \pi_1 \rho_{i_1} \pi'$  une factorisation comme dans (3). Soit  $\pi'_j$  le chemin obtenu à partir de  $\pi_j$  en remplaçant tout passage de temps par un passage de temps nul. Soit  $\pi'$  le chemin obtenu en remplaçant  $\pi_j$  par  $\pi'_j$  dans  $\pi$ . Par la proposition B.2,  $\pi'$  est un chemin valide et par la proposition B.1, l'état d'arrivée est bien  $\pi'_p$ .  $\square$

La proposition précédente peut être réappliquée pour un différent  $j$  puisque le chemin faible obtenu satisfait toujours l'hypothèse. Le bloc  $i_r$  est particulier : On peut enlever les passages de temps dans  $\pi_{i_r}$  mais la taille du bloc  $i_r$  à l'état d'arrivée dépend des autres blocs (voir la proposition B.1).

La proposition suivante montre qu'on peut répéter un chemin faible qui retourne à l'état de contrôle de départ, si on lui enlève tout passage de temps.

**Proposition B.4.** *Soit  $\pi : q_1 q_2 \dots q_p$  un chemin faible sur une trace  $(\delta_i)_i$  tel que  $\text{right}_{\Delta}^{q_i}(x) \geq 2$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et tout  $1 \leq i \leq p$ ,  $\text{loc}(q_1) = \text{loc}(q_p)$ , et  $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$  sont les horloges actives. Soit  $(\delta'_i)_i$  la trace obtenue à partir de  $(\delta_i)_i$  en remplaçant tout passage de temps par un passage de temps nul. Alors il existe  $q'_1$  tel que  $\pi' : q_1 \xrightarrow{\delta'^*} q'_1 \xrightarrow{\delta^*} q_p$ , où  $\text{temps}(\delta') = 0$  et  $\text{untime}(\delta') = \text{untime}(\delta)$ .*

*Démonstration.* Il est clair que  $\delta'$  est réalisable à partir de  $q_1$  (proposition B.3). Si  $q_1 = (d, \vec{n})$  alors  $q'_1 = (d', \vec{n}')$  où  $n'_i = -1$  pour tout  $i \in \{i_1, \dots, i_{r-1}\}$ ,  $n'_r = n_{m,2}^+ + n_1^+ + \dots + n_{r-1}^+ + n_r$  et  $n'_i = n_i$  pour le reste, par le lemme B.1. La trace  $\delta$  est réalisable à partir de  $q'_1$  car toute horloge active est plus proche de la tête du ruban dans  $q'_1$  que dans  $q_1$ , et les horloges inactives sont à même distance de la tête du ruban puisqu'il n'y a pas de passage de temps dans  $\delta'$ , donc toute garde satisfaite dans  $\pi$  est satisfaite dans  $\pi'$ . L'état d'arrivée est  $q_p$  par le lemme B.1.  $\square$

Le lemme principal de ce paragraphe est le lemme d'itération pour les chemins faibles :

**Lemme B.5** (Lemme d'itération des chemins faibles). *Soit  $\pi : q_1 q_2 \dots q_p = (d, \vec{n})$  un chemin faible restreint tel que  $\text{loc}(q_1) = \text{loc}(q_p)$  sur une trace  $(\delta_i)_i$  et  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  les horloges. Alors il existe un chemin faible  $\pi' : q_1 q'_2 \dots q'_p = (d', \vec{n}')$  tel que  $\text{untime}(\pi') = \text{untime}(\pi)^3$ ,  $n'_r = n_r + 1$ ,  $n'_m = n_m - 1$  et  $n'_i = n_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{r, m\}$ .*

*Preuve du lemme B.5.* Par la proposition B.4, on a  $q_1 \xrightarrow{\delta'^*} q'_1 \xrightarrow{\delta'^*} q'_1 \xrightarrow{\delta} q_p$ . On peut ajouter un passage de temps qui fait traverser un  $\Delta$  avant de commencer la deuxième  $\delta'$ . La trace  $\delta'$  est réalisable à partir de là car l'horloge  $x_{i_r}$  est distant (au moins de  $\Delta^2$ ) de la tête du ruban par hypothèse.  $\square$

## B.2 Nous vous éliminons vos cycles faibles

Dans la suite, on va voir les cycles faibles de  $\mathcal{C}_A(\Delta^N)$  comme des suites de transitions atomiques. On écrit désormais les chemins en omettant les états intermédiaires dans les cycles faibles, en écrivant seulement l'état de départ et l'état d'arrivée de tels cycles. Tout chemin a alors une nouvelle écriture unique, définie comme suit. Pour un chemin  $\pi$ ,

$$\{\pi\} = \pi^{(1)} \gamma^{(1)} \pi^{(2)} \gamma^{(2)} \dots \gamma^{(k)} \pi^{(k+1)}, \quad (4)$$

où les  $\pi^{(i)}$  sont des chemins, et les  $\gamma^{(i)}$  sont les états de départ des cycles faibles maximaux les plus à gauche de  $\pi$ . Ainsi, pour tout  $1 \leq i \leq k$ , le premier état du chemin  $\pi^{(i+1)}$  est l'état d'arrivée d'un cycle faible qui part de  $\gamma^{(i)}$ . Les états intermédiaires sont cachés dans cette écriture. On impose qu'au moins une horloge soit entière dans tout  $\gamma^{(i)}$  et dans tout  $\text{first}(\pi^{(i)})$ . Il ne s'agit pas d'une restriction importante puisqu'en isolant le premier et le dernier passage de temps, tout cycle faible peut être mis sous cette forme.

On redéfinit également les *traces* des chemins. Celle-là contiennent toujours toute l'information sur les transitions des chemins mais sous une forme différente. Chaque élément d'une trace est désormais soit une transition discrète, soit un passage de temps, soit une suite de telles transitions représentant un cycle faible. Pour un élément d'une trace qui correspond à un cycle faible  $\delta = \delta_1 \dots \delta_k$  on définit  $\text{temps}_\Delta(\delta) = \text{temps}_\Delta(\delta_1) + \dots + \text{temps}_\Delta(\delta_k)$  et  $\text{untime}(\delta) = \text{untime}(\delta_1) \cdot \dots \cdot \text{untime}(\delta_k)$ . Ainsi on étend les  $\text{temps}_\Delta()$  et  $\text{untime}()$  à la nouvelle définition des traces. Si  $q \xrightarrow{\delta^*} q'$  est un cycle faible, alors on écrit  $q \rightsquigarrow^\delta q'$ . On redéfinit le nombre de passage de temps d'un chemin en comptant chaque cycle faible comme un passage de temps. On note  $\|\pi\|_{\text{time}} = k + |\pi|_{\text{time}}$ , où  $|\pi|_{\text{time}}$  compte les passages de temps en dehors des cycles faibles.

On redéfinit la notion de rester grand sur un chemin comme suit. La relation  $\prec$  est la même lors des transitions de  $\pi^{(i)}$ . Sur un cycle faible  $q \rightsquigarrow^\gamma q'$ , on définit  $\prec$  de la façon suivante. Soit  $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  les horloges actives de ce cycle faible donné dans l'ordre d'apparence dans  $q'$ , et soit  $x_{i_m}$  la dernière horloge des contenus du ruban de  $q$  et  $q'$ . On



note  $q' = (d', \vec{n}')$ . On pose,

$$\begin{aligned} (q, i_j) < (q', i_j) & \quad \text{si } i_j \neq i_m \text{ et } x_{i_j} \notin A, \\ (q, i_j) < (q', i_r) & \quad \text{si } x_{i_j} \in A, \\ (q, i_m) < (q', i_m) & \quad \text{si } n'_m \geq 2. \\ (q, i_m) < (q', i_j) & \quad \text{si } i_j \in \text{Pompables}(\gamma), \end{aligned}$$

On redéfinit la notion de *rester grand* avec la nouvelle définition de  $<$ .

### B.3 Lemme de pompage pour les blocs qui restent grands

Le lemme suivant montre qu'on peut pomper dans un bloc pompable.

**Lemme B.6.** *Soit  $\pi : q_1 \rightsquigarrow^\delta q_2 = (d, \vec{n})$  un cycle faible où  $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  sont les horloges actives. Si  $n_m \geq 1$ , alors pour tout  $j \in \text{Pompables}(\pi)$ , il existe un cycle faible  $\pi' : q_1 \rightsquigarrow^{\delta'} q'_2 = (d', \vec{n}')$  avec  $\text{untime}(\delta') = uv^3w$  pour une décomposition  $\text{untime}(\delta) = uvw$ , tel que  $n'_m = n_m - 1$ ,  $n'_j = n_j + 1$  et  $n'_i = n_i$  pour tout autre  $i \neq j, m$ .*

*Preuve du lemme B.6.* Soit  $\pi = \pi_{i_r} \rho_{i_r} \pi_{i_{r-1}} \rho_{i_{r-1}} \pi_{i_{r-2}} \dots \pi_{i_1} \rho_{i_1}$  une décomposition de  $\pi$  comme dans (3). Pour obtenir le chemin  $\pi'$ , on modifie  $\pi_{i_j}$  en  $\pi'_{i_j}$  comme suit. Soit  $\delta_{i_j}$  la trace du chemin  $\pi_{i_j}$ .

Si  $\delta_{i_j}$  contient un passage de temps  $\tau$  avec  $\text{temps}_\Delta(\tau) \geq 2$ , alors on remplace  $\tau$  par  $\tau'$  tel que  $\text{temps}_\Delta(\tau') = \text{temps}_\Delta(\tau) + 1$ . On peut alors continuer le reste du chemin suivant la même trace et les gardes seront toujours satisfaites vu que le bloc modifié était déjà de taille au moins 2 dans  $\pi$ . On a le résultat par la proposition B.1. Dans ce cas la trace non-temporisée du chemin obtenu est identique à la trace originale.

Sinon, tout passage de temps  $\tau$  dans  $\delta_{i_j}$  est tel que  $\text{temps}_\Delta(\tau) \leq 1$ . Comme  $\text{temps}_\Delta(\pi_{i_j}) \geq K_0$  par définition, il y a au moins  $K_0$  transitions discrètes dans  $\delta_{i_j}$  entre lesquels il y a un passage de temps  $\tau$  tel que  $\text{temps}_\Delta(\tau) = 1$ . Alors  $\pi_{i_j}$  contient un chemin faible  $p \rightsquigarrow^v p'$  sur une trace  $v$  avec  $\text{loc}(p) = \text{loc}(p')$  où pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\text{left}_\Delta^p(x) \geq 2$  ssi  $\text{left}_\Delta^{p'}(x) \geq 2$ . Un tel état se répète car  $K_0 \geq 2|\mathcal{L}| \cdot |\{-1, 0, 1, 2^+\}|^{\mathcal{X}} + 5$ . De plus, on peut choisir ce chemin tel que  $\delta_{i_j} = uvw$  où  $\text{temps}_\Delta(v) \geq 2$  et  $\text{temps}_\Delta(w) \geq 2$ . Par le choix de  $v$  et  $w$ , le chemin faible ainsi identifié est un chemin faible restreint. Si aucune horloge n'est active sur ce chemin, alors on peut ajouter un passage de temps  $\tau$  avec  $\text{temps}_\Delta(\tau) = 1$  à la fin de  $v$  puisque toute horloge est déjà éloignée de la tête du ruban. Sinon, on applique la proposition B.5 sur  $v$ , qui donne une trace  $v'v''v$  avec  $\text{untime}(v) = \text{untime}(v') = \text{untime}(v'')$ ,  $\text{temps}(v') = 0$  et  $\text{temps}_\Delta(v'') = 1$ . On pose alors  $\delta'_{i_j} = uv'v''vw$ , qui définit bien un chemin valide. On conclut avec la proposition B.1.  $\square$

D'après la construction du lemme précédent, étant donné un cycle faible  $\pi = \pi_{i_r} \rho_{i_r} \dots \pi_{i_1} \rho_{i_1}$ , pour tout  $j \in \text{Pompables}(\pi)$ , il existe une décomposition  $\pi_j = u_j v_j w_j$  tel que soit  $u_j$  se termine par un passage de temps  $\tau$  avec  $\text{temps}_\Delta(\tau) \geq 2$  et  $v_j = \epsilon$ , soit  $\text{temps}_\Delta(v_j), \text{temps}_\Delta(w_j) \geq 2$ , et  $v_j$  définit un chemin faible restreint qui revient à l'état de contrôle de départ. Ainsi on peut transformer tout  $\pi_j = u_j v_j w_j$  en  $u_j (v'_j)^+ v_j w_j$  où  $v'_j$  s'obtient à partir de  $v_j$  en enlevant les passages de temps, en conservant l'état d'arrivée (à la fin de  $v_j$ ). On appelle

$v_j$  un facteur répétable de  $\pi_j$ . On fixe arbitrairement une décomposition pour chaque  $\pi_j$ , où  $j$  est pompable (par exemple en prenant le premier tel facteur dans  $\pi_j$ ).

Pour un cycle faible  $\pi$ , on définit  $\widehat{T}$  comme l'ensemble des traces obtenues en répétant arbitrairement les facteurs répétables de  $\pi$ . Si  $\pi$  est un chemin quelconque qui suit une trace  $T = T_1 \dots T_n$ , on définit  $\widehat{T}$  comme l'ensemble des traces obtenues en répétant les facteurs répétables dans les cycles faibles de  $T$ .<sup>3</sup> Formellement, soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tels que les  $T_{\alpha_i}$  sont des cycles faibles. On pose  $\widehat{T} = T_1 \dots T_{\alpha_1-1} \widehat{T_{\alpha_1}} \dots T_{\alpha_2-1} \widehat{T_{\alpha_2}} \dots T_{\alpha_k-1} \widehat{T_{\alpha_k}} \dots T_n$ .

On montre maintenant un lemme de pompage pour les blocs qui restent grands sur un chemin. Si  $T$  est la trace non-temporisée du chemin original, alors la trace du chemin obtenu appartiendra à  $\widehat{T}$ .

**Lemme B.7.** *Soit un chemin  $\{\pi\} : \pi_1 \dots \pi_n$  sur une trace non-temporisée  $T$  tel que  $(\pi_1, k_1) \prec \dots \prec (\pi_n, k_n)$ . Alors, pour tout  $L > 0$ , il existe un chemin  $\pi' : \pi_1[x_{k_1} \leftarrow x_{k_1} \Delta^L] \dots \pi_n[x_{k_n} \leftarrow x_{k_n} \Delta^L]$  sur une trace non-temporisée  $T' \in \widehat{T}$ .*

*Démonstration.* Le résultat est clair pour les transitions discrètes et les passages de temps par le lemme 3.8. Pour un cycle faible  $\pi : q_1 \rightsquigarrow^\delta q_2$ , où  $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  sont les horloges actives, et  $i_j, i_{j'} \in \mathcal{X}$  tel que  $(q_1, i_j) \prec (q_2, i_{j'})$ , on montre que  $q_1[x_{i_j} \leftarrow x_{i_j} \Delta^L] \rightsquigarrow^{\delta'} q_2[x_{i_{j'}} \leftarrow x_{i_{j'}} \Delta^L]$  avec  $\text{untime}(\delta') \in \widehat{\text{untime}(\delta)}$ . Si  $i_j \in A$  alors nécessairement  $i_{j'} = i_r$  et le résultat est clair. Si  $i_j \neq i_m$  et  $i_j \notin A$  alors c'est une conséquence du lemme 3.8. Idem si  $i_j = i_{j'} = i_m$ . Le seul cas non trivial est quand  $i_j = i_m$  et  $i_{j'} \in \text{Pompables}(\pi)$  (si  $i_j = i_m$ , on a nécessairement  $i_{j'} \in \text{Pompables}(\pi)$  par définition). Soit  $\pi = \pi_{i_r} \rho_{i_r} \pi_{i_{r-1}} \rho_{i_{r-1}} \pi_{i_{r-2}} \dots \pi_{i_1} \rho_{i_1}$  une décomposition de  $\pi$  comme dans (3). Comme  $\text{temps}_\Delta(\pi_{i_{j'}}) \geq 2$ , si on note  $q'_1 = \text{last}(\pi_{i_r} \rho_{i_r} \dots \pi_{i_{j'-1}} \rho_{i_{j'-1}})$ , on a  $\text{right}_\Delta^{q'_1}(x_{i_m}) \geq 2$  donc on a bien  $q_1[x_{i_m} \leftarrow x_{i_m} \Delta^L] \rightarrow^* q'_1[x_{i_m} \leftarrow x_{i_m} \Delta^L]$  suivant la même trace. Pour obtenir le chemin  $\pi'$ , on modifie  $\pi_{i_{j'}}$  en  $\pi'_{i_{j'}}$  par le lemme B.6 (en répétant  $L$  fois le facteur répétable).  $\square$

## B.4 Construire des chemins quasi-exacts bornés

Étant donné un chemin de longueur bornée, on va construire un chemin qui est exact sur les transitions ordinaires, et dont les cycles faibles ont une forme particulière, appelé *forme normale*. On appellera ces chemins *quasi-exacts*. On commence par montrer que les grands blocs restent grands sur des chemins de longueur bornée (dans le sens de  $\|\cdot\|$ ) (lemme B.8). On transforme les chemins en traitant d'abord les deux cas d'un cycle faible (lemmes B.9 et B.10), ensuite les chemins bornés en général (lemme B.11). On termine avec quelques propriétés des chemins quasi-exacts, à savoir qu'ils peuvent être suivis en partant de tout état de la région de départ (lemmes B.13 et B.14) et que tout chemin quasi-exact assez long contient un cycle de progrès (lemme B.12).

**Lemme B.8.** *Soit  $\{\pi\} = \pi_1 \dots \pi_n$  un chemin avec  $\|\pi\|_{\text{time}} = p$ . Alors tout bloc de  $\pi_1$  de taille supérieure ou égale à  $pXK_0$  reste grand sur  $\pi$ .*

3.  $\widehat{T}$  dépend a priori de  $\pi$ , mais il n'y aura pas de confusion dans l'usage qu'on en fera.

*Démonstration.* À adapter de la preuve du lemme 3.9. Lors de chaque cycle faible, la somme des étiquettes peut être diminuée de  $(X-1)(K_0-1)$  (en fait, au plus de  $K_0-1$  par bloc non pompable et par cycle faible et de 2 lors des passages de temps ordinaires).  $\square$

Pour un chemin  $\{\pi\} = q_1 q_2 \dots q_p$ , on définit  $H(\pi, i, p)$  comme dans la section précédente. Un chemin  $\pi = q_1 \dots q_p$  est un *chemin quasi-exact* si tous les  $\pi^{(i)}$  sont exacts dans (4),  $[q_i] \subseteq [H(\pi, i, p)]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ , et si tous les cycles faibles sont sous forme normale.

Les deux lemmes suivants mettent les cycles faibles sous forme normale. Le premier traite le cas où le bloc  $i_m$  reste grand, et le deuxième le cas où il se décompose.

**Lemme B.9.** *Soit  $\pi : q_1 q_2 \dots q_p = (d, \vec{n})$  un cycle faible où  $\text{right}_{\Delta}^{q_p}(x_{i_m}) \geq 2$  et  $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  sont les horloges actives avec  $r \geq 1$ . Soit  $\pi = \pi_{i_r} \rho_{i_r} \dots \pi_{i_1} \rho_{i_1}$  la décomposition de  $\pi$  comme dans (3). Alors pour tout ensemble  $R$  qui vérifie  $A \setminus \text{Pompables}(\pi) \subseteq R \subseteq A$ , il existe un cycle faible sous forme normale  $\pi' : q_1 \rightsquigarrow q'_p = (d, \vec{n}')$  sur la même trace non-temporisée que  $\pi$  tel que  $[q'_p] \subseteq [q_p]$ , et*

- $n'_j = -1$  pour tout  $i_j \in R \setminus \{i_r\}$ ,
- $n'_r = n_r$  si  $i_r \notin R$  et  $n'_r = n_r - \text{temps}_{\Delta}(\pi_{i_r})^+$  sinon.
- $n'_m = n_m + \sum_{i_j \in R} n_j^+ + (\text{temps}_{\Delta}(\pi_{i_r})^+)$  si  $i_r \in R$
- $n'_i = n_i$  pour tout autre  $i$ .

*Démonstration.* L'hypothèse sur le cycle faible implique que pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\text{right}_{\Delta}^{q_i}(x) \geq 2$  pour tout  $i$ . On obtient  $\pi'$  par la proposition B.3 appliquée à tout bloc  $j \in R \setminus \{i_r\}$  et la proposition B.2 appliquée à  $i_r$  si  $i_r \in R$ .  $\square$

**Lemme B.10.** *Soit  $\pi : q_1 q_2 \dots q_p = (d, \vec{n})$  un cycle faible où  $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  sont les horloges actives. Soit  $\pi = \pi_{i_r} \rho_{i_r} \dots \pi_{i_1} \rho_{i_1}$  la décomposition de  $\pi$  comme dans (3). On suppose que  $\text{Pompables}(\pi) \neq \emptyset$ . Alors pour tout ensemble  $R$  qui vérifie  $A \setminus \text{Pompables}(\pi) \subseteq R \subsetneq A$ , il existe un cycle faible sous forme normale  $\pi' : q_1 \rightsquigarrow q'_p = (d, \vec{n}')$  sur la même trace non-temporisée que  $\pi$  tel que  $[q'_p] \subseteq [q_p]$ , et*

- $n'_j = -1$  pour tout  $i_j \in R \setminus \{i_r\}$ ,
- $n'_r = n_r$  si  $i_r \notin R$  et  $n'_r = n_r - \text{temps}_{\Delta}(\pi_{i_r})^+$  sinon.
- $n'_m = -1$ .
- il existe  $i_0 \in \text{Pompables}(\pi) \setminus R$  tel que  $n'_{i_0} = n_{i_0} + \sum_{i_j \in R} n_j^+ + (\text{temps}_{\Delta}(\pi_{i_r})^+)$  si  $i_r \in R$
- $n'_i = n_i$  pour tout autre  $i$ .

*Démonstration.* Soit  $\pi = \pi_{i_r} \rho_{i_r} \pi_{i_{r-1}} \rho_{i_{r-1}} \pi_{i_{r-2}} \dots \pi_{i_1} \rho_{i_1}$  une décomposition de  $\pi$  comme dans (3). Soit  $j_0 \in \{1, \dots, r\}$  minimal tel que  $i_{j_0} \in \text{Pompables}(\pi) \setminus R$  (donc  $x_{i_{j_0}}$  est la dernière à être remise à zéro parmi  $\text{Pompables}(\pi) \setminus R$ ). Comme  $\text{temps}_{\Delta}(\pi_{i_{j_0}}) \geq 2$ , sur le chemin  $\pi_{i_r} \rho_{i_r} \pi_{i_{r-1}} \rho_{i_{r-1}} \dots \pi_{i_{j_0+1}} \rho_{i_{j_0+1}}$ , aucune horloge n'est proche du bord du ruban. Alors par les propositions B.3 et B.2 si  $i_r \in R$ , on obtient un chemin  $\pi'_{i_r} \rho_{i_r} \pi'_{i_{r-1}} \rho_{i_{r-1}} \dots \pi'_{i_{j_0-1}} \rho_{i_{j_0-1}}$  sur la même trace non-temporisée tel que  $\text{temps}(\pi'_{i_j}) = 0$  pour tout  $i_j \in R$ . Par le lemme B.6, on modifie  $\pi_{i_{j_0}}$  en  $\pi'_{i_{j_0}}$  tel que  $\text{temps}_{\Delta}(\pi'_{i_{j_0}}) = \text{temps}_{\Delta}(\pi_{i_{j_0}})^+ + n_m + \sum_{i_j \in R} n_j^+$  de sorte que  $x_{i_m}$  est entière à la fin de  $\pi_{i_{j_0}}$ . Enfin,

on effectue le reste du chemin en supprimant tout passage de temps. Donc pour tout  $i_j \in \{i_1, \dots, i_{j_0-1}\} \setminus R$ , on aura  $\text{temps}(\pi_{i_j}) = 0$ , et comme  $j_0$  était le dernier bloc de Pompables( $\pi$ )  $\setminus R$ , il s'agit bien des blocs non-pompables.  $\square$

On fixe  $N_0 = XK_0^2(W+1)$  et  $N_1 = 4X^2N_0$ . Alors sur tout chemin  $\pi$  avec  $|\pi|_{\text{time}} \leq K_0(W+1)$ , tout bloc de taille  $N_0$  reste grand par le lemme B.8. Dans le lemme suivant, pour tout tel chemin on construit un chemin quasi-exact proche. On montre ensuite, dans le lemme B.12, que tout chemin quasi-exact de cette longueur contient un cycle.

Un bloc est dit grand s'il est de taille au moins  $N_0$ , moyen s'il est de taille  $\{2, \dots, N_0 - 1\}$  et petit sinon.

**Lemme B.11.** *Soit  $\{\pi\} : q_1 \dots q_n$  un chemin de  $\mathcal{C}_A(\Delta^{N_1})$  sur une trace non-temporisée  $T$  tel que  $|\pi|_{\text{time}} \leq K_0(W+1)$ . Alors il existe  $\{\pi'\} : q'_1 \dots q'_n$  un chemin quasi-exact sur  $T$  tel que  $q'_1 = H(\pi, 1, n)$ , et  $d_\Delta(q_i, q'_i) \leq (X+1)N_0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .*

*Démonstration.* On construit  $q'_i$  par récurrence sur  $i \in \{1, \dots, n\}$ , qui vérifie les conditions suivantes.

- $[q'_i] \subseteq [q_i]$ ,
- pour tout  $1 \leq j \leq m$ , si le bloc  $j$  se décompose sur  $q_i \dots q_n$ , alors  $n'_j = -1$ , et  $n'_j \geq n_j$  sinon,
- $q'_i$  est de  $\Delta$ -distance finie de  $q_i$  avec un vecteur de correction  $\vec{k}^{(i)}$ .

Les passages de temps et les transitions discrètes sont gérés comme dans le lemme 3.14. Pour une transition  $q_i \xrightarrow{\gamma} q_{i+1}$  on distingue deux cas.

Si le bloc  $i_m$  de  $q_{i+1}$  est grand ou reste grand dans  $q_{i+1} \dots q_n$ , alors on applique le lemme B.9, en choisissant  $R$  comme l'ensemble des blocs non-pompables et les blocs pompables petits ou moyens dans  $q_{i+1}$  et qui se décomposent sur  $q_{i+1} \dots q_n$ . Montrons que l'état  $q'_{i+1}$  ainsi obtenu vérifie les conditions. Le bloc d'une horloge inactive se décompose dans  $q_{i+1} \dots q_n$  si et seulement s'il se décompose dans  $q_i \dots q_n$ , donc par hypothèse de récurrence, les blocs petits ou moyens qui se décomposent dans  $q_{i+1}$  sont de taille  $-1$  dans  $q'_i$  et dans  $q'_{i+1}$ . Par construction, tout bloc actif parmi  $\{i_1, \dots, i_{r-1}\}$  de taille petite ou moyenne qui se décompose dans  $q_{i+1} \dots q_n$  est de taille  $-1$  dans  $q'_{i+1}$ . Il reste à voir la taille du bloc  $i_r$  dans  $q'_{i+1}$ . Supposons  $i_r \in R$ , et soient  $q'_i = (d, \vec{n})$ ,  $q'_{i+1} = (d', \vec{n}')$ . Alors on a par construction  $n'_r = \text{left}_{\Delta}^{q'_i}(x_{i_{r+1}})$  dans  $q'_{i+1}$  (il s'agit des sommes des blocs à gauche de  $x_{i_r}$  plus le bloc de  $i_r$ ). Par hypothèse de récurrence, un bloc de  $q'_i$  est de taille positive ssi il est grand ou il reste grand dans la suite du chemin. Dans tous les cas, comme  $n'_r$  vaut la somme de tous les blocs  $i_1, \dots, i_r$  de  $q'_i$ ,  $n'_r$  est positif si et seulement si l'un de ces blocs est grand ou reste grand, donc si et seulement si  $i_r$  reste grands dans  $q_{i+1} \dots q_n$ .

Si le bloc  $i_m$  de  $q_{i+1}$  est petit ou moyen et se décompose dans  $q_{i+1} \dots q_n$ , alors on applique le lemme B.10. Le raisonnement est le même. On note que dans ce cas, si aucun bloc n'est pompable, alors le bloc  $i_m$  doit déjà être de taille  $-1$  puisque c'est la dernière transition du chemin sur lequel il se décompose (i.e. il n'est continué par aucun bloc), donc on n'a pas besoin d'appliquer le lemme B.10.

L'analyse du vecteur de correction est similaire au lemme 3.14. Si  $\|\vec{k}\|_1$  est incrémentée d'un nombre  $n_0''$  lors d'un passage de temps, alors pendant  $\lfloor \frac{n_0''}{XK_0} \rfloor$  passages de temps, elle ne changera pas, par le lemme B.8. Lors d'un cycle faible,  $\|\vec{k}\|_1$  augmente au plus de  $K_0 - 1$  par bloc non pompable et d'une quantité  $p$  par bloc pompable qui se décompose sur la suite du chemin. Dans ce dernier cas, par le lemme B.8, la norme du vecteur ne change pas pendant  $\lfloor \frac{p}{XK_0} \rfloor$  passages de temps.  $\square$

On dit qu'un chemin quasi-exact  $\{\pi\} : q_1 \dots q_n$  est un *cycle quasi-exact de progrès* si  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q_1) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_n)$  et que toute horloge présente dans  $q_1$  y est remise à zéro au moins une fois.

**Lemme B.12.** *Soit  $\pi$  un chemin quasi-exact tel que  $\|\pi\|_{\text{time}} \geq (|\mathcal{L}|X! + 1)(W + 1)$ . Alors  $\pi$  contient un cycle quasi-exact de progrès.*

*Démonstration.* Un cycle sur lequel une horloge change de valeur entière est nécessairement un cycle de progrès. Or il peut y avoir au plus  $|\mathcal{L}|X!$  cycles faibles sur une unité de temps, sans qu'une horloge change de partie entière (par maximalité des cycles faibles dans (4)). Alors  $\pi$  change au moins  $W + 1$  fois de régions, donc une région se répète.  $\square$

Comme les chemins exacts, les chemins quasi-exacts peuvent être suivis par n'importe quel état de la région de l'état initial.

**Lemme B.13.** *Soit  $\{\pi\} = q_1 \dots q_p$  un chemin quasi-exact sur une trace  $\delta$ . Alors pour tout  $q'_1$  tel que  $[q'_1] \subseteq [q_1]$ , il existe un chemin quasi-exact  $\{\pi'\} : q'_1 \dots q'_p$  sur une trace  $\delta'$  avec  $[q'_i] \subseteq [q_i]$  pour tout  $1 \leq i \leq p$ , et  $\text{untime}(\delta') \in \widehat{\text{untime}(\delta)}$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\delta_i)_{\{1 \leq i \leq p\}}$  la trace du chemin quasi-exact  $\pi$ . On fait une récurrence sur  $1 \leq i \leq p$ . Supposons  $q'_1 \rightarrow^* q'_i$  construit. Si la  $\delta_i$  est une transition discrète ou un passage de temps alors il existe  $q'_{i+1}$  tel que  $q'_i \rightarrow q'_{i+1}$  et  $[q'_{i+1}] \subseteq [q_{i+1}]$  par le lemme 3.15. Si  $q_i \rightsquigarrow^{\delta_i} q_{i+1}$ , alors comme  $[q'_i] \subseteq [q_i] \subseteq [H(\pi, i, n)]$ , tout petit bloc de  $q_i$  est de taille  $-1$  dans  $q'_i$ . Soient  $q_i = (d, \vec{n})$  et  $q'_i = (d', \vec{n}')$ . On distingue deux cas.

Si  $\text{temps}_{\Delta}(\delta_i) < n_m$  alors le bloc  $i_m$  n'est pas petit dans  $q_{i+1}$ . Si  $n'_m \geq n_m$  alors  $\delta_i$  est réalisable à partir de  $q'_i$  et on arrive à un état  $q'_{i+1}$  où  $[q'_{i+1}] \subseteq [q_{i+1}]$ . Si  $n'_m < n_m$ , alors on supprime les derniers  $n_m - n'_m$  passages de temps dans  $\delta_i$  pour obtenir  $\delta'_i$  tel que  $\text{temps}_{\Delta}(\delta'_i) = n'_m$ . La trace  $\delta'_i$  est réalisable à partir de  $q'_i$  et on arrive dans un état  $q'_{i+1}$  avec  $[q'_{i+1}] \subseteq [q_{i+1}]$ .

Sinon  $\text{temps}_{\Delta}(\delta_i) = n_m$  et donc le bloc  $i_m$  est de taille  $-1$  dans  $q_i$ . Si  $n'_m \leq n_m$  alors on supprime les derniers passages de temps dans  $\delta_i$  pour avoir  $\text{temps}_{\Delta}(\delta'_i) = n'_m$  comme dans le cas précédent. Si  $n'_m > n_m$  alors soit  $\delta_i = uvw$  tel que  $v$  est un facteur répétable de  $\delta_i$  (il en existe car tout cycle faible admet un bloc pompable dans un chemin quasi-exact). Par le lemme B.4, on obtient la trace  $uv'w$  tel que  $\text{temps}_{\Delta}(v') = \text{temps}_{\Delta}(v) + n'_m - n_m$ . Par cette trace, à partir de  $q'_i$ , on arrive dans  $q'_{i+1}$  avec  $[q'_{i+1}] \subseteq [q_{i+1}]$ .  $\square$

On peut également suivre un chemin en arrière.

**Lemme B.14.** Soit  $\{\pi\} = q_1 \dots q_p$  un chemin quasi-exact sur une trace  $\delta$ . Alors pour tout  $q'_p$  tel que  $[q'_p] \subseteq [q_p]$ , il existe un chemin quasi-exact  $\{\pi'\} : q'_1 \dots q'_p$  sur une trace  $\delta'$  avec  $[q'_i] \subseteq [q_i]$  pour tout  $1 \leq i \leq p$  et  $\text{untime}(\delta') \in \widehat{\text{untime}(\delta)}$ .

*Démonstration.* Pour les transitions exactes, c'est fait dans le lemme 3.16. Pour les cycles faibles, la preuve est similaire à celle du lemme précédent.  $\square$

## B.5 Preuve du lemme de pompage

*Idée de preuve du lemme 3.3 dans le cas général.* La même preuve que dans la section précédente mais avec les nouveaux lemmes.  $\square$

## B.6 Preuve du lemme 3.17

Le but de cette sous-section est de démontrer le lemme 3.17. Pour cela, on suit les idées de la preuve du lemme 29 de [10]. On fixe  $N > 0$  et un cycle quasi-exact de progrès  $\{\pi\} : \pi_1 \dots \pi_n$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  sur une trace non-temporisée  $T$ . Pour  $\mathcal{T} = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  ou  $\mathcal{T} = \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}}$ , on pose

$$L_{\pi}(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{array}{l} q \in \mathcal{S}(\mathcal{T}) : q = q_1 \xrightarrow{\delta_1} q_2 \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} q_n = q \text{ t.q.} \\ \text{untime}(\delta) \in \widehat{T} \text{ et } [q_i] \subseteq [\pi_i], \forall 1 \leq i \leq n \end{array} \right\}.$$

Ainsi,  $L_{\pi}(\mathcal{T})$  est l'ensemble des états de  $\mathcal{T}$  qui admettent un cycle quasi-exact qui suivent la même trace non-temporisée que  $\pi$ , à l'exception de boucler éventuellement plus à l'intérieur des cycles faibles, en restant dans l'adhérence des régions visitées par  $\pi$  après chaque transition.

Par le lemme B.13, à partir de tout état  $q$  avec  $[q] \subseteq [\pi_1]$ , on peut répéter le cycle de trace  $T$  un nombre arbitraire de fois. Comme l'ensemble des états de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  est fini (pour  $N$  fixé), on trouvera un état  $q' \in L_{\pi}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N))$  tel que  $q \rightarrow_{\widehat{T}^*} q'$ . De même, par le lemme B.14, pour tout  $q$  avec  $[q] \subseteq [\pi_1]$ , il existe un état  $q' \in L_{\pi, T}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N))$  à partir duquel on peut atteindre  $q$  en répétant  $\widehat{T}$ . Il suffit donc de démontrer le lemme 3.17 pour deux états de  $L_{\pi}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N))$ . Pour ce faire, on adapte le raisonnement de [10] comme suit : on commence par montrer que  $L_{\pi}(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}})$  est convexe (Lemme B.15) et connexe par arcs (Lemme B.16). Cela généralise le lemme 29 de [10] aux cycles quasi-exacts de progrès mais ne nous permet pas de conclure directement car on aurait besoin d'une relation de bisimulation alors qu'on a seulement  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{2N}) \sqsubseteq \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}} \sqsubseteq \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ . Pour pouvoir se servir du résultat obtenu pour  $L_{\pi}(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}})$ , on étudie dans la deuxième partie de la preuve (propositions B.17...B.21) l'effet de dupliquer les symboles de  $\Delta$  dans les états de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ . Par cette technique, on obtient, à partir de tout état  $q \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N))$ , un état  $\bar{q} \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{2N}))$  assez similaire (dans le sens de la proposition B.20). On arrive ainsi à utiliser l'encadrement  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{2N}) \sqsubseteq \llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}} \sqsubseteq \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  pour conclure. Les étapes de la preuve est illustrée dans la figure B.6.

Soit  $q = q_1 q_2 \dots q_n = q$  un chemin sur une trace  $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$ , témoin de  $q \in L_{\pi}(\mathcal{T})$ . Par définition, si  $\pi_i \xrightarrow{T_i^*} \pi_{i+1}$  est un cycle faible,  $\text{untime}(\delta_i)$  s'obtient à partir de  $\text{untime}(T_i)$ ,

en répétant éventuellement chaque facteur répétable. Autrement dit, si  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  sont les horloges actives sur  $T_i$ , et si on a

$$T_i = \overbrace{(u_{i_r} v_{i_r} w_{i_r})}^{t_{i_r}} \cdot \overbrace{(u_{i_{r-1}} v_{i_{r-1}} w_{i_{r-1}})}^{t_{i_{r-1}}} \cdot \dots \cdot \overbrace{(u_{i_1} v_{i_1} w_{i_1})}^{t_{i_1}}, \quad (5)$$

où  $t_{i_r} \dots t_{i_1}$  est la décomposition de  $T_i$  comme dans (3), et les  $v_j$  les facteurs répétables, alors  $\delta_i$  s'écrit,  $\delta_i = v_{i_r} \nu_{i_r} \omega_{i_r} \dots v_{i_1} \nu_{i_1} \omega_{i_1}$ , tel que  $\text{untime}(v_{i_j}) = \text{untime}(u_{i_j})$ ,  $\text{untime}(\nu_{i_j}) \in \text{untime}(v_{i_j})^+$  et  $\text{untime}(\omega_{i_j}) = \text{untime}(w_{i_j})$ . Montrons qu'on peut modifier  $\delta_i$  pour ajouter des répétitions pour chaque facteur répétable. C'est une légère adaptation du lemme B.4. Soit

$$\pi_i \xrightarrow{t_{i_r} \dots t_{i_{j-1}} u_{i_j}} \pi'_i \xrightarrow{v_{i_j}} \pi''_i \xrightarrow{w_{i_j}} \pi'''_i \xrightarrow{t_{i_{j+1}} \dots t_{i_1}} \pi_{i+1}.$$

De même,

$$q_i \xrightarrow{\dots v_{i_j}} q'_i \xrightarrow{\nu_{i_j}} q''_i \xrightarrow{\omega_{i_j}} q'''_i \xrightarrow{\dots} q_{i+1}.$$

On note  $\nu'_{i_j}$  la trace obtenue à partir de  $\nu_{i_j}$  en enlevant les passages de temps. Alors on a  $q'_i \xrightarrow{\nu'_{i_j} \nu_{i_j}} q''_i$ . En effet, comme  $\pi'_i \xrightarrow{*}_{v_{i_j}} \pi''_i$  est un chemin faible restreint, toute garde satisfaite inexactement porte sur les horloges actives sur  $v_{i_j}$ . Donc comme  $\nu_{i_j}$  est réalisable à partir de  $q'_i$ ,  $\nu'_{i_j} \nu_{i_j}$  l'est aussi. Pour les mêmes raisons, on peut continuer la trace  $\omega_{i_j} \dots$  à partir de  $q''_i$  et arriver à  $q_{i+1}$ .

**Lemme B.15.**  $L_\pi(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}})$  est convexe.

*Démonstration.* Soient  $(l, v)$  et  $(l, v')$  éléments de  $L_\pi(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}})$ . On va montrer que  $(l, \lambda v) + (l, (1-\lambda)v') \in L_\pi(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}})$ , pour tout  $0 < \lambda < 1$ . Soient  $p$  et  $p'$  les chemins correspondant à  $(l, v)$  et  $(l, v')$ . On n'a pas nécessairement  $\text{untime}(p) = \text{untime}(p')$  mais par la remarque plus haut, on peut modifier  $p$  et  $p'$  en répétant tous les facteurs répétables et avoir la même trace non-temporisée. On définit alors un chemin  $p''$ , comme combinaison linéaire de  $p$  et  $p'$ , sur la même trace non-temporisée, en prenant  $\lambda\tau + (1-\lambda)\tau'$  pour tout passage de temps de durées  $\tau$  et  $\tau'$  respectivement dans  $p$  et  $p'$ . Comme les régions et les gardes sont convexes, ce chemin est valide, et tout état de  $p''$  est combinaison linéaire des états respectifs de  $p$  et  $p'$  de coefficient  $\lambda$ .  $\square$

**Lemme B.16.** Soit  $(l, v) \in L_\pi(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}})$  avec une trace (temporisée)  $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$ . Alors pour tout  $v' \in [\pi_1]$  tel que  $d_\infty(v, v') \leq \frac{1}{2N}$ , on a  $(l, v) \xrightarrow{\delta'}^* (l, v')$  avec  $\text{untime}(\delta') \in \widehat{\text{untime}(\delta)} \subseteq \widehat{T}$ .

*Démonstration.* On rénumérote les horloges actives sur ce cycle en  $x_1, \dots, x_m$  tel que  $v(x_i) \geq v(x_{i+1})$  et on suppose  $v(x_i) \neq v(x_{i+1})$  sans perte de généralité.

Comme  $[v'] \subseteq [\pi_1]$ , les inégalités qui définissent  $[\pi_1]$  sont vérifiées par  $v'$ . En particulier, les valeurs fractionnaires des horloges ont le même ordre dans  $v'$  que dans  $v$  au

sens large. Soit  $\Delta_i = v'(x_i) - v(x_i)$  pour tout  $1 \leq i \leq m$  et  $\Delta_0 = \Delta_{m+1} = 0$ . Il existe  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m$  tels que  $\delta_{\alpha_i}$  est la dernière transition discrète ou cycle faible qui remet  $x_i$  à zéro. Si  $\delta_{\alpha_i}$  est une transition discrète, on pose  $\delta_{\alpha_i}^- = \delta_{\alpha_i}$  et  $\delta_{\alpha_i}^+ = \epsilon$ . Si  $\delta_{\alpha_i}$  est un cycle faible, alors  $\delta_{\alpha_i}^-$  (resp  $\delta_{\alpha_i}^+$ ) le préfixe (resp. le suffixe) de  $\delta_{\alpha_i}$  jusqu'à (resp. qui commence après) la dernière remise à zéro de  $x_i$ . On pose  $\alpha_0 = 0$ . On décompose  $\delta = f_0 f_1 \dots f_m$  où  $f_i = \delta_{\alpha_{i+1}} \dots \delta_{\alpha_{i+1}}^- \delta_{\alpha_{i+1}}^+$  pour tout  $i$ . Pour toute horloge  $x_i$ , on a

$$v(x_i) = \text{temps}(\delta_{\alpha_i}^+) + \sum_{l=\alpha_i+1}^n \text{temps}(\delta_l). \quad (6)$$

Comme  $v'(x_i) \geq v'(x_{i+1})$ , on a

$$\Delta_{i+1} - \Delta_i \leq v(x_i) - v(x_{i+1}) = \text{temps}(\delta_{\alpha_i}^+) + \sum_{l=\alpha_i+1}^{\alpha_{i+1}-1} \text{temps}(\delta_l) + \text{temps}(\delta_{\alpha_{i+1}}^-), \quad (7)$$

Pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on note  $(l_k, v_k)$  l'état tel que  $(l, v) \xrightarrow{\delta_1 \dots \delta_k} (l_k, v_k)$ . On va construire un chemin  $(l_k, v'_k)_{1 \leq k \leq n}$  en modifiant les traces  $f_i$  en  $f'_i$  tel que  $\text{temps}(f'_i) = \text{temps}(f_i) + \Delta_i - \Delta_{i+1}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  et on conclura avec (6). La construction est illustrée comme suit.

$$\begin{array}{ccccccc} \delta = & \overbrace{[\delta_1 \dots \delta_{\alpha_1}^- \delta_{\alpha_1}^+]}^{f_0} & \cdot & \overbrace{[\delta_{\alpha_1+1} \dots \delta_{\alpha_2}^- \delta_{\alpha_2}^+]}^{f_1} & \cdot & \overbrace{[\delta_{\alpha_2+1} \dots \delta_{\alpha_3}^- \delta_{\alpha_3}^+]}^{f_2} & \cdot & \dots & \cdot & \overbrace{[\delta_{\alpha_m} \dots \delta_n]}^{f_m} \\ \delta' = & \frac{\begin{array}{c} +\Delta_0 \\ f'_0 \end{array}}{f_0} & & \frac{\begin{array}{c} +(\Delta_1 - \Delta_2) \\ f'_1 \end{array}}{f_1} & & \frac{\begin{array}{c} +(\Delta_2 - \Delta_3) \\ f'_2 \end{array}}{f_2} & & \dots & & \frac{\begin{array}{c} +\Delta_m \\ f'_m \end{array}}{f_m} \end{array}$$

Le chemin construit vérifiera la propriété suivante : pour tous  $1 \leq i, j \leq m$ , et tout  $k \in \{\alpha_i + 1, \dots, \alpha_{i+1}\}$ , il existe  $\eta_k(x), \mu_k(x) \in [0, 1]$  avec  $\eta_{\alpha_{i+1}}(x_i) = \mu_{\alpha_{i+1}}(x_i) = 1$ , et  $i' \leq i$ , tel que

$$v'_k(x_j) = v_k(x_j) + \mu_k(x)(\Delta_{i'} - \Delta_{i'+1}) + \Delta_{i'+1} - \Delta_i + \eta_k(x)(\Delta_i - \Delta_{i+1}). \quad (8)$$

Ici, pour toute horloge  $x$ ,  $i'$  sera l'indice du dernier facteur  $f_{i'}$  avant  $f_i$  dans lequel  $x$  a été remise à zéro, et  $\mu_k(x)$  la fraction du passage de temps ajouté  $\Delta_{i'} - \Delta_{i'+1}$  écoulé dans  $f_{i'}$  après cette remise à zéro (voir la figure). Alors la condition  $\eta_{\alpha_{i+1}}(x_i) = \mu_{\alpha_{i+1}}(x_i) = 1$  implique que  $v'_k(x_i) = v_k(x_i) + \Delta_i - \Delta_{i+1}$ . On a, par (8),  $|v_k(x) - v'_k(x)| \leq \frac{1}{N}$  pour toute horloge  $x$ , par inégalité triangulaire, quelque soient les valeurs de  $\mu_k$  et  $\eta_k$ .

On pose  $f'_0 = f_0$ . La propriété est vérifiée pour l'état  $v_{\alpha_1+1}$  (avec  $\eta_{\alpha_1+1} = 0$  et  $i' = i$ ).

Pour  $i \geq 1$ , supposons  $f'_0, f'_1, \dots, f'_{i-1}$  construit. Soit  $(l, v) \xrightarrow{f'_0 f'_1 \dots f'_{i-1}} (l_{\alpha_i}, v'_{\alpha_i})$  où l'état  $(l, v'_{\alpha_i})$  vérifie (8).

Si  $\Delta_i - \Delta_{i+1} \geq 0$  alors on prolonge le passage de temps  $\delta_{\alpha_{i+1}}$  de  $\Delta_i - \Delta_{i+1}$  ( $\delta_{\alpha_{i+1}}$  est un passage de temps par le choix de  $\delta_{\alpha_i}^+$ ), et on l'appelle  $\delta'_{\alpha_{i+1}}$ . On obtient alors  $(l_{\alpha_i}, v_{\alpha_i}) \rightarrow^{\delta'_{\alpha_{i+1}}} (l_{\alpha_{i+1}}, v'_{\alpha_{i+1}})$ , qui vérifie (8) avec  $\eta_{\alpha_{i+1}} = 1$ . On a en effet,  $v'_{\alpha_{i+1}}(x_j) =$



$v_{\alpha_i+1}(x_j) + \mu_{\alpha_i+1}(x)(\Delta_{i'} - \Delta_{i'+1}) + \Delta_{i'+1} - \Delta_{i+1}$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$  (où  $i'$  dépend de  $j$  selon (8)). On décrit maintenant la suite de la trace  $f'_i$ . On construit  $f'_i$  en recopiant exactement les transitions discrètes et les passages de temps de  $f_i$ . Toutes ces transitions sont réalisables car les  $(l_k, v_k)$  satisfait toutes les gardes exactement et  $d_\infty(v_k, v'_k) \leq \frac{1}{N}$  par (8), pour tout  $k \in \{\alpha_i + 1, \dots, \alpha_{i+1}\}$ . De plus, (8) est conservé à chaque transition (en changeant  $i'$  et  $\mu_k(x)$  lors des remises à zéro). Si  $\delta_k$  est un cycle faible qui s'écrit  $\delta_k = t_{i_r} \dots t_{i_1}$  comme dans (3), soit  $t_{i_j} = uvw$  où  $i_j$  est le premier bloc pompable (tel que  $j$  est maximal dans  $\{1, \dots, r\}$ ), et  $v$  est le facteur répétable de  $t_{i_j}$ . Comme  $T_k$  est sous forme normale, et que  $[(l_{k+1}, v_{k+1})] \subseteq [\pi_{k+1}]$ , tout bloc  $t_{i_l}$  avec  $l > j$  est tel que  $\text{temps}(t_{i_l}) = 0$ , par maximalité de  $j$  (car ce sont des blocs non pompables). Soient  $u'$  (resp.  $v'$ ) la trace obtenue à partir de  $u$  (resp. de  $v$ ) en enlevant tout passage de temps, et  $\tau$  un passage de temps avec  $\text{temps}(\tau) \leq \frac{1}{N}$  et  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $l \cdot \text{temps}(\tau) = \text{temps}(u)$ . On va montrer que pour  $\delta'_k = t_{i_r} \dots t_{i_{j+1}} t'_{i_j} t_{i_{j-1}} \dots t_{i_1}$  avec  $t'_{i_j} = u'v'(\tau v')^l v w$ , on a  $(l_k, v'_k) \rightarrow_{\delta'_k}^* (l_{k+1}, v'_{k+1})$ , avec  $(l_k, v_{k+1})$  qui vérifie (8). La trace  $t_{i_r} \dots t_{i_{j+1}} u'v'$  est réalisable à partir de  $(l_k, v'_k)$  car  $v$  suit la trace non-temporisée d'un chemin faible restreint (de  $\pi$ ). On peut donc répéter le facteur  $v'$   $l$  fois, en insérant les passages de temps  $\tau$  entre les répétitions. Ce chemin est toujours valide dans  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}}$  puisque  $\text{temps}(\tau) \leq \frac{1}{N}$ . On peut poursuivre cette trace par  $vw$  pour les mêmes raisons. Comme  $\text{temps}(t'_{i_j}) = \text{temps}(t_{i_j})$ , l'état d'arrivée  $(l_{k+1}, v'_{k+1})$  vérifie  $v'_{k+1}(x) = v_{k+1}(x)$  pour toute horloge  $x$  active sur  $\delta_k$ , et vérifie (8) pour les horloges inactives car cela est vérifié dans  $(l_k, v'_k)$ .

Si  $\Delta_i - \Delta_{i+1} < 0$  alors on raccourcit les passages de temps de  $f_i$  de  $\Delta_i - \Delta_{i+1}$ . Par (7), on a bien  $\text{temps}(f_i) \geq \Delta_{i+1} - \Delta_i$ . S'il y a assez de passages de temps en dehors des cycles faibles, alors on raccourcit arbitrairement ceux-là pour obtenir  $\text{temps}(f'_i) = \text{temps}(f_i) + \Delta_i - \Delta_{i+1}$ . Alors les transitions ordinaires et les cycles faibles sont réalisables comme dans le cas précédent (éventuellement en répétant un facteur dans chaque cycle faible). Si les passages de temps ordinaires ne suffisent pas alors on modifie les cycles faibles de  $f_i$ , en raccourcissant les passages de temps des  $t_j$  où  $j$  est un bloc pompable. On montre que le chemin est valide comme dans le cas précédent. Pour toute horloge  $x$ , si la remise à zéro la plus récente de  $x$  a eu lieu dans  $f'_i$ , alors le coefficient  $\mu_k(x)$  est la fraction du passage de temps ajouté (ou supprimé) par cette construction dans  $f'_i$  après cette remise à zéro ; le coefficient  $\eta_k(x)$  est la fraction de passage de temps supprimé dans  $f_i$  depuis la la remise à zéro la plus récente de  $x$ . Voir la figure 4.  $\square$

La proposition établit une propriété des états de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  qui sont l'abstraction d'un même état de  $\mathcal{A}$ .

**Proposition B.17.** *Soit  $(l, v)$  un état de  $\mathcal{A}$  et soit  $\pi_1, \pi_2$  deux états de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  tels que  $(l, v) \prec_{abs} \pi_1$  et  $(l, v) \prec_{abs} \pi_2$ . Supposons (quitte à rénuméroter) que les horloges apparaissent dans l'ordre  $x_1, \dots, x_m$  dans les rubans de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Soit  $d_i = \text{left}_{\Delta}^{\pi_1}(x_i) -$*

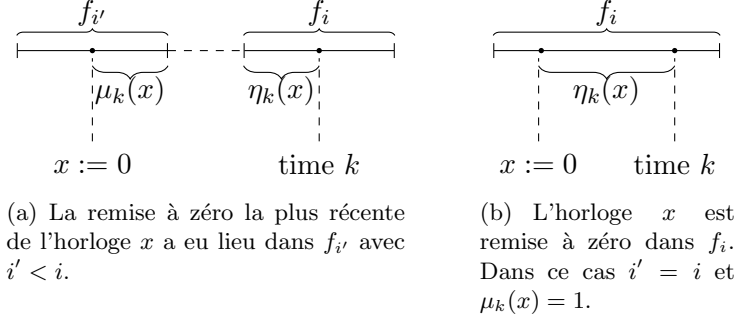


FIGURE 4 – Deux cas de la construction du lemme B.16

$\text{left}_{\Delta}^{\pi_2}(x_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Alors on est dans l'un des deux cas :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq m, \quad d_1 + \dots + d_i \in \{-1, 0\} \\ \text{ou bien} \\ \forall 1 \leq i \leq m, \quad d_1 + \dots + d_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Comme la valuation des horloges de  $\mathcal{X}$  est fixée, la seule liberté dans le choix des valuations de  $\mathcal{B}^N$  est la valuation des horloges  $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ , notée  $\delta$  et  $\delta'$  respectivement pour les deux états. Comme on a toujours  $0 < \Delta_1 < 1$ , et  $\Delta_{i+1} - \Delta_i = \frac{1}{N}$ , il existe  $0 \leq \epsilon < \frac{1}{N}$  tel que  $\delta'_i = \delta_i + \epsilon$  pour tout  $i$  (ou bien  $\delta_i = \delta'_i + \epsilon$ ). On fait une récurrence sur  $1 \leq i \leq X$  pour montrer la forme des  $d_1 + \dots + d_i$ .  $\square$

On démontre maintenant un résultat similaire au lemme B.16 mais pour les états de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  proches dans le sens de la proposition précédente.

**Proposition B.18.** Soit  $\pi_1 \in L_{\pi}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N))$  et  $\pi_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$  tels qu'il existe  $(l, v) \in \mathcal{A}$  avec  $(l, v) \prec_{\text{abs}} \pi_1$  et  $(l, v) \prec_{\text{abs}} \pi_2$ . Alors  $\pi_1 \xrightarrow{\delta'} \pi_2$  où  $\delta' \in \widehat{T}$ .

*Démonstration.* Soit  $(\delta)_i$  la trace du cycle de  $\pi_1$ . On rénumérote les horloges actives sur ce cycle en  $x_1, \dots, x_m$  tel que  $v(x_i) \geq v(x_{i+1})$  et on suppose que  $v(x_i) \neq v(x_{i+1})$ . Il existe  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m$  où  $\delta_{\alpha_i}$  est la dernière transition discrète ou cycle faible qui remet  $x_i$  à zéro. Si  $\delta_{\alpha_i}$  est une transition discrète, on pose  $\delta_{\alpha_i}^- = \delta_{\alpha_i}$  et  $\delta_{\alpha_i}^+ = \epsilon$ . Si  $\delta_{\alpha_i}$  est un cycle faible, alors  $\delta_{\alpha_i}^-$  (resp  $\delta_{\alpha_i}^+$ ) le préfixe (resp. le suffixe) de  $\delta_{\alpha_i}$  jusqu'à (resp. qui commence après) la dernière remise à zéro de  $x_i$ . On pose  $\alpha_0 = 0$ . Écrivons

$$\delta = \begin{array}{ccccccc} f_0 & & f_1 & & f_2 & \dots & f_m \\ [\delta_1 \dots \delta_{\alpha_1}^-] & [\delta_{\alpha_1}^+ \delta_{\alpha_1+1} \dots \delta_{\alpha_2}^-] & [\delta_{\alpha_2}^+ \delta_{\alpha_2+1} \dots \delta_{\alpha_3}^-] & \dots & [\delta_{\alpha_m}^+ \delta_{\alpha_m} \dots \delta_n] \end{array}$$

Alors on a,

$$\text{left}_{\Delta}^{\pi_1}(x_i) = \text{temps}_{\Delta}(\delta_{\alpha_i}^+) + \sum_{l=\alpha_i+1}^n \text{temps}_{\Delta}(\delta_l) \pmod{N}. \quad (9)$$

Si on pose  $d_i = \text{left}_{\Delta}^{\pi_2}(x_i) - \text{left}_{\Delta}^{\pi_1}(x_i)$ , alors la suite  $d_1, \dots, d_m$  vérifie la propriété suivante par la proposition précédente.

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq j < i \leq m, d_i = 1 &\Rightarrow d_j + d_{j+1} + \dots + d_i \in \{0, 1\} \\ \forall 1 \leq j < i \leq m, d_i = -1 &\Rightarrow d_j + d_{j+1} + \dots + d_i \in \{-1, 0\} \end{aligned} \quad (10)$$

On va construire une trace  $\delta' = f'_0 \dots f'_m$  tel que  $\pi_1 \xrightarrow{\delta'} \pi_2$ . Notons  $q_i$  l'état tel que  $\pi_1 \xrightarrow{\delta_1 \dots \delta_i} q_i$  et  $q'_i$  tel que  $\pi_1 \xrightarrow{\delta'_1 \dots \delta'_i} q'_i$ . Les états  $q'_i$  vont vérifier la propriété suivante : pour tout  $i, j \in \{0, \dots, m\}$ , il existe  $\alpha_i \leq \alpha'_i < \alpha_{i+1}$  tel que

$$\begin{aligned} \forall k \in \{\alpha_i, \dots, \alpha'_i\}, \exists j' \leq i \quad \text{left}_{\Delta}^{q'_k}(x_j) &= \text{left}_{\Delta}^{q_k}(x_j) + d_{j'} + \dots + d_{i-1} \\ \forall k \in \{\alpha'_i + 1, \dots, \alpha_{i+1}\}, \exists j' \leq i \quad \text{left}_{\Delta}^{q'_k}(x_j) &= \text{left}_{\Delta}^{q_k}(x_j) + d_{j'} + \dots + d_i \end{aligned} \quad (11)$$

On pose  $f'_0 = f_0$  et  $f'_i = f_i$  pour tout  $i > 0$  tel que  $d_1 = \dots = d_i = 0$ . Supposons  $f'_0 \dots f'_{i-1}$  construit.

Si  $d_i = 0$ , on définit  $f'_i$  de la manière suivante. Pour tout  $k \in \{\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{i+1}\}$ , si  $\delta_k$  est une transition discrète ou un passage de temps alors  $\delta'_k = \delta_k$ . Si  $\delta_k$  est un cycle faible, alors soit  $\delta_k = t_{i_r} \dots t_{i_{j+1}} uvwt_{i_{j-1}} \dots t_{i_1}$  où  $j$  est maximal tel que  $i_j$  est un bloc pompable de  $q_{k+1}$ . On pose alors  $\delta'_k = t_{i_r} \dots t_{i_{j+1}} u'v'(v'\tau)^l wt_{i_{j-1}} \dots t_{i_1}$  où  $u'v'$  est obtenue à partir de  $uv$  en enlevant les passages de temps, et  $\tau$  est un passage de temps tel que  $\text{temps}_{\Delta}(\tau) = 1$ . On montre comme dans le lemme B.16 que cette trace est réalisable.

Si  $d_i = 1$ , alors pour toute horloge  $x_j$ , on a  $\text{left}_{\Delta}^{q'_k}(x_j) - \text{left}_{\Delta}^{q_k}(x_j) \in \{-1, 0\}$  par (11). Si on modifie le premier passage de temps pour faire traverser un  $\Delta$  de plus. Alors l'état d'arrivée vérifie (11) et on construit le reste du chemin et  $q'_{\alpha_{i+1}}$  comme dans le cas précédent.

Si  $d_i = -1$ , alors pour toute horloge  $x_j$ , on a  $\text{left}_{\Delta}^{q'_k}(x_j) - \text{left}_{\Delta}^{q_k}(x_j) \in \{-1, 0\}$  par (11). On suit les transitions et les cycles faibles comme dans le cas  $d_i = 0$  jusqu'au premier passage de temps  $\tau$  tel que  $\text{temps}_{\Delta}(\tau) \geq 1$ . On raccourcit ce passage de temps de un  $\Delta$  et conclut comme dans le premier cas.

La trace  $\delta'$  ainsi construite est applicable à partir de  $\pi_1$  comme on vient de démontrer. Par (9), on a bien  $\pi_1 \xrightarrow{\delta'} \pi_2$ . □

Pour un état  $q$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N)$ , soit  $\bar{q}$  l'état de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{2N})$  obtenu en dupliquant chaque  $\Delta$  dans le contenu du ruban de  $q$ .

**Proposition B.19.** *Si  $q \in L_{\pi}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^N))$  alors  $\bar{q} \in L_{\pi}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{2N}))$ .*

*Démonstration.* Soit  $q = q_1 \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_n} q_n = q$ . On va adapter ce chemin à  $\bar{q}$ , en se servant du fait que tout bloc non trivial reste grand sur ce chemin (car  $[q_i] \subseteq [\pi_i] \subseteq [H(\pi, i, n)]$  par hypothèse). On construit un chemin  $\bar{q} = q'_1 \dots q'_n = \bar{q}$  tel que  $\bar{q}_i = q'_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

Les transitions discrètes exactes et les passages de temps s'adaptent facilement car toute garde est satisfaite exactement, donc il suffit de prolonger les passages de temps. Traitons les cycles faibles. Par hypothèse de récurrence, on a  $q'_i = \bar{q}_i$  au début d'un cycle

faible. Comme tout petit bloc est de taille  $-1$  dans  $q_i$ , toute garde satisfaite en  $q_i$  est satisfaite aussi en  $q'_i$ . On peut donc suivre la même trace en  $q'_i$  qu'en  $q_i$ , en répétant les facteurs répétables pour insérer deux fois plus de  $\Delta$  dans chacun des blocs pompables, puisque par hypothèse sur  $\pi$ , tout bloc qui n'est pas pompable est de taille  $-1$  à l'état d'arrivée. On a bien  $q'_{i+1} = \overline{q_{i+1}}$ .  $\square$

**Proposition B.20.** *Soit  $q \in L_\pi(\mathcal{C}_A(\Delta^N))$ . Alors pour tout  $(l, v) \in \mathcal{A}$ , si  $\bar{q} \prec_{\text{conc}} (l, v)$  alors  $(l, v) \prec_{\text{abs}} q$ .*

*Démonstration.* Soit la valuation  $\Delta_1, \dots, \Delta_{2N}$  pour  $\bar{q}$ . On pose  $\Delta'_i = \Delta_1 + \frac{\Delta_{2i-1} + \Delta_{2i}}{2}$  et vérifie que on a bien  $(l, v) \prec_{\text{abs}} q$  pour cette valuation.  $\square$

**Lemme B.21.** *Si  $q \in L_\pi(\mathcal{C}_A(\Delta^N))$ , alors il existe  $(l, v) \in L_\pi(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}})$  tel que  $(l, v) \prec_{\text{abs}} q$ .*

*Démonstration.* Soit  $T' \in \widehat{T}$  tel que  $\bar{q} \xrightarrow{T'} \bar{q}$  (qui existe par le lemme B.19). Soit  $(l_1, v_1)$  tel que  $\bar{q} \prec_{\text{conc}} (l_1, v_1)$ . Par le lemme 2.1, il existe  $(l_i, v_i)$  pour tout  $i \geq 2$  tels que  $\bar{q} \prec_{\text{conc}} (l_i, v_i)$  et  $(l_i, v_i) \xrightarrow{\delta^{(i)}} (l_{i+1}, v_{i+1})$  avec  $\text{untime}(\delta^{(i)}) = T'$ . L'ensemble des valeurs fractionnaires  $\{v_i(x)\}$  de  $x$  est borné pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et les passages de temps de  $\delta^{(i)}$  peuvent être supposés bornés aussi. Par compacité, il existe un point d'accumulation de cette suite, un état  $(l, v)$  et une trace  $\delta$  avec  $\text{untime}(\delta) = T'$ . On a  $(l, v) \xrightarrow{\delta} (l, v)$  car toutes les inégalités sont larges donc toutes les gardes sont vérifiées quand on passe à la limite. Cependant on n'a pas nécessairement  $\bar{q} \prec_{\text{conc}} (l, v)$  car cette relation dépend de l'existence d'une valuation pour des horloges supplémentaires qui vérifient des contraintes strictes (ouvertes). Mais on va montrer que si  $\epsilon > 0$  est assez petit, alors pour tout  $i \geq 1$  tel que  $d_\infty(v, v_i) \leq \epsilon$ ,  $(l, v_i) \in L_\pi(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}})$ . Comme  $q_i \prec_{\text{conc}} (l, v_i)$ , on aura  $(l, v_i) \prec_{\text{abs}} q$  par la proposition précédente.

Soit un tel  $i_0$  et  $0 < \epsilon < \frac{1}{3N}$ . On montre qu'on peut adapter la preuve du lemme B.16 pour construire un chemin tel que  $(l_{i_0}, v_{i_0}) \rightarrow^* (l_{i_0}, v_{i_0})$ . On a bien  $[v_{i_0}], [v] \subseteq [\pi_1]$ , et si on modifie la trace  $(\delta_i)_i$  comme dans cette preuve, il suffit pour conclure de montrer qu'elle est réalisable à partir de  $(l, v_{i_0})$ . Pour cela, on construit le chemin  $(l_k, v'_k)_{k \geq 1}$  où  $v'_1 = v_{i_0}$ , et l'invariant (8) est remplacée par

$$v'_k(x_j) = v_k(x_j) + \epsilon_k(x_j) + \mu_k(x)(\Delta_{i'} - \Delta_{i'+1}) + \Delta_{i'+1} - \Delta_i + \eta_k(x)(\Delta_i - \Delta_{i+1}). \quad (12)$$

où  $\epsilon_1(x_j) = v'(x_j) - v(x_j)$  et  $|\epsilon_k(x_j)|$  est décroissant pour tout  $x_j$ . Il s'agit en effet d'un coefficient supplémentaire borné par  $\epsilon$ , qui représente la différence entre commencer le chemin en  $v_1$  et  $v'_1$ . Comme  $|\Delta_i| \leq \frac{1}{3N}$  et  $|\epsilon_k(x_j)| \leq \frac{1}{3N}$ , l'équation (12) implique  $d_\infty(v_k, v'_k) \leq \frac{1}{N}$  par inégalité triangulaire. Pour finir, on suit la preuve du lemme B.16.  $\square$

*Preuve du lemme 3.17.* Par la remarque du début de cette sous-section, on se concentre sur les états  $\pi_1, \pi'_n \in L_\pi(\mathcal{C}_A(\Delta^N))$ . Par le lemme B.21, il existe un état  $(l_1, v_1) \in L_\pi(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}})$  tel que  $(l_1, v_1) \prec_{\text{abs}} \pi_1$ . De même, soit  $(l'_1, v'_1) \in L_\pi(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}})$  tel que  $(l'_1, v'_1) \prec_{\text{abs}}$

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\pi_1} & \overline{\pi'_n} & \in L_\pi(\mathcal{C}_A(\Delta^{2N})) \\
\prec_{\text{conc}} & \prec_{\text{conc}} & \\
(l_1, v_1) \xrightarrow{\text{Lemme B.16}} (l'_1, v'_1) & & \in L_\pi(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N}}) \\
\prec_{\text{abs}} & \prec_{\text{abs}} \quad \succ_{\text{abs}} & \\
(\pi_1) \xrightarrow{\text{Lemme 2.1}} \pi'_1 \xrightarrow{\text{Lemme B.18}} (\pi'_n) & & \in L_\pi(\mathcal{C}_A(\Delta^N))
\end{array}$$

FIGURE 5 – Preuve du lemme 3.17.

$\pi'_n$ . Par le lemme B.16, on a  $(l_1, v_1) \rightarrow^* (l'_1, v'_1)$  sur une trace  $\widehat{T}$ . Donc il existe  $\pi'_1 \in \mathcal{C}_A(\Delta^N)$  tel que  $\pi_1 \rightarrow^* \pi'_1$  et  $(l'_1, v'_1) \prec_{\text{abs}} \pi'_1$ , sur la même trace non-temporisée, par le lemme 2.1. Par le lemme B.18,  $\pi'_1 \rightarrow^* \pi'_n$  sur une trace de  $\widehat{T}$ .  $\square$

## C Preuve de correction de $\mathcal{R}(\mathcal{A})_w^\gamma$

On étudie l'accessibilité entre les régions de  $\mathcal{A}$  le long des cycles faibles (corollaire C.2) et les cycles quasi-exacts de progrès (lemme C.3). Ces propriétés nous permettent ensuite de démontrer le théorème 4.1.

**Lemme C.1.** *Soit  $\pi : q_1 \rightsquigarrow q_2$  un cycle faible sous forme normale de  $\mathcal{C}_A(\Delta^{2N_1})$ , sur une trace non-temporisée  $T$ . Alors, quelque soit  $N \geq 2N_1$ ,*

- *Pour tout  $q'_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_A(\Delta^N))$  avec  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q'_1) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_1)$ , il existe  $q'_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_A(\Delta^N))$  tel que  $q'_1 \xrightarrow{\widehat{T}^*} q'_2$ ,*
- *Pour tout  $q'_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_A(\Delta^N))$  avec  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q'_2) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_2)$ , il existe  $q'_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_A(\Delta^N))$  tel que  $q'_1 \xrightarrow{\widehat{T}^*} q'_2$ .*

*Démonstration.* Immédiat en regardant de plus près les preuves des lemmes B.13 et B.14. Il s'agit en effet d'une version plus fine de ces lemmes.  $\square$

**Corollaire C.2.** *Soit  $\pi : q_1 \rightsquigarrow q_2$  un cycle faible sous forme normale de  $\mathcal{C}_A(\Delta^{2N_1})$ , sur une trace non-temporisée  $T$ . Alors, quelque soit  $\delta > 0$ ,*

- *Pour tout  $(l, v) \in \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_1)$ , il existe  $(l, v') \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$  tel que  $(l, v) \xrightarrow{\widehat{T}^*} (l, v')$  dans  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$ ,*
- *Pour tout  $(l, v') \in \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_2)$ , il existe  $(l, v) \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$  tel que  $(l, v) \xrightarrow{\widehat{T}^*} (l, v')$  dans  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$ .*

*Démonstration.* Soit  $\delta > 0$  et  $N \geq \max(2N_1, 2\lceil 1/\delta \rceil)$ . Par le lemme C.1, pour tout  $q'_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_A(\Delta^N))$  tels que  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q'_1) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_1)$ , il existe  $q'_2$  avec  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q'_2) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_2)$  tel que  $q'_1 \xrightarrow{\widehat{T}^*} q'_2$  dans  $\mathcal{C}_A(\Delta^N)$ . Soient  $(l, v) \in \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_1)$  et  $q'_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_A(\Delta^N))$ , tel que  $q'_1 \prec_{\text{conc}} (l, v)$ . On a bien  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q'_1) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_1)$ , et il existe  $q'_2$  avec  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q'_2) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_2)$

et  $q'_1 \xrightarrow{\widehat{T}^*} q'_2$ . Alors par le lemme 2.1, il existe  $(l, v')$  tel que  $(l, v) \xrightarrow{\widehat{T}^*} (l, v')$  dans  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$  et  $q'_2 \prec_{\text{conc}} (l, v')$ , donc  $(l, v') \in \text{Val}_{\mathcal{X}}(q'_2) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_2)$ . Tout chemin de  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$  est aussi un chemin de  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\delta'}$  pour tout  $\delta' > \delta$ .

Le deuxième point est similaire.  $\square$

**Lemme C.3.** Soit  $q_1 \xrightarrow{T^*} q_2$  un cycle quasi-exact de progrès de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{2N_1})$ ,  $T$  une trace non-temporisée. Alors pour tout  $(l, v_1) \in [q_1]$  et  $(l, v_2) \in [q_2]$ ,  $(l, v_1) \xrightarrow{\widehat{T}^*} (l, v_2)$  dans  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$ , pour tout  $\delta > 0$ .

*Démonstration.* Soit  $q \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{2N_1}))$  tel que  $q \prec_{\text{conc}} (l, v_1)$ . En répétant le cycle quasi-exact à partir de  $q$ , on arrive dans un état  $q'$  tel que  $q' \in L_{\Pi}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{2N_1}))$ . Par le lemme 2.1, il existe  $(l, v'_1)$  tel que  $q' \prec_{\text{conc}} (l, v'_1)$  et  $(l, v_1) \xrightarrow{\widehat{T}^*} (l, v'_1)$  dans  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N_1}}$ . Alors par la construction du lemme B.21, on obtient  $(l, v'_1) \xrightarrow{\widehat{T}^*} (l, v''_1)$  où  $(l, v''_1) \in L_{\Pi}(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N_1}})$ . On peut faire le même raisonnement à l'envers et montrer que  $(l, v_2)$  admet un prédécesseur  $(l, v'_2)$  par  $\widehat{T}^*$  qui appartient à  $L_{\Pi}(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_{\frac{1}{N_1}})$ . Enfin, le lemme B.16 établit  $(l, v'_1) \xrightarrow{\widehat{T}^*} (l, v'_2)$ .  $\square$

On démontre le théorème 4.1 par les deux lemmes suivants.

**Lemme C.4.** Soit  $\Pi = ((L_i, R_i))_{i \geq 1}$  un chemin fini ou infini sur  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$ . Alors pour tout  $\delta > 0$ , il existe un chemin  $\pi = ((l_i, v_i))_{i \geq 1}$  de  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$ , avec  $\text{untime}(\pi) \in \widetilde{\text{untime}}(\Pi)$ .

*Démonstration.* On construit le chemin  $(l_i, v_i)$  par récurrence sur  $i \geq 0$ . L'état initial est  $(L_0, \bar{0}) \in (L_0, R_0)$  où  $L_0$  est l'état de contrôle initial de  $\mathcal{A}$ , et  $R_0 = \{\bar{0}\}$ . Si la  $i$ -ème transition est un passage de temps ou une transition discrète (exacte) de  $\mathcal{R}_w^\gamma$  alors cette transition peut être suivi à partir de  $(l_i, v_i)$  et on arrive dans un état  $(l_{i+1}, v_{i+1}) \in (L_{i+1}, R_{i+1})$ . Si la  $i$ -ème transition est un cycle faible, soit  $q_1 \rightsquigarrow q_2$  un cycle faible sous forme normale de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Delta^{2N_1})$  témoin de cette transition sur une trace  $T$ . Par le corollaire C.2, il existe  $(l_{i+1}, v_{i+1})$  tel que  $(l_i, v_i) \xrightarrow{\widehat{T}^*} (l_{i+1}, v_{i+1})$ .  $\square$

**Lemme C.5.** Soit  $\phi$  une propriété de co-Büchi. Alors, pour tout  $\delta \leq \frac{1}{N_1}$ , s'il existe un chemin de  $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket_\delta$  qui ne vérifie pas  $\phi$  alors il existe un chemin de  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$  qui ne vérifie pas  $\phi$ .

*Démonstration.* Soit  $\pi'$  obtenu à partir de  $\pi$  par le lemme 3.3. Pour toute transition exacte ou passage de temps  $\pi'_i \rightarrow \pi'_{i+1}$ , il y a la transition correspondante dans  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$  entre les régions  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(\pi'_i)$  et  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(\pi'_{i+1})$ . Si  $\pi'_i \rightarrow \pi'_{i+1}$  est un cycle faible sous forme normale avec  $L$  l'ensemble des états de contrôle visités et  $A$  l'ensemble des horloges actives, alors il existe une transition  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(\pi'_i) \xrightarrow{w(A,L)} \text{Val}_{\mathcal{X}}(\pi'_{i+1})$ , par le lemme C.6. De même, s'il s'agit d'un cycle quasi-exact de progrès alors  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$  contient la transition  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(\pi'_i) \xrightarrow{\gamma(L)} \text{Val}_{\mathcal{X}}(\pi'_{i+1})$ .  $\square$

Dans la description de l'algorithme, nous n'avons pas justifié le majorant de  $3|\mathcal{L}|XK_0$  sur la longueur des cycles faibles. Dans le lemme suivant, on montre que pour construire  $\mathcal{R}_w^\gamma(\mathcal{A})$ , on peut se restreindre aux cycles de longueur bornée. Cela établit le théorème 4.2.

**Lemme C.6.** *Soit  $\pi : q_1 \rightsquigarrow q_2$  un cycle faible normalisé sur  $\mathcal{C}_A(\Delta^{2N_1})$  avec  $A \subseteq \mathcal{X}$  l'ensemble des horloges actives et  $L \subseteq \mathcal{L}$  l'ensemble des états de contrôle visités dans  $\pi$ . Alors il existe un cycle faible normalisé  $\pi' : q'_1 \rightsquigarrow q'_2$  avec  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q'_1) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_1)$ ,  $\text{Val}_{\mathcal{X}}(q'_2) = \text{Val}_{\mathcal{X}}(q_2)$  et  $|\pi'| \leq XK_0|\mathcal{L}|^2$  avec  $A$  l'ensemble des horloges actives et  $L$  l'ensemble des états de contrôle visités.*

*Démonstration.* Soit  $\pi = \pi_{i_r} \dots \pi_{i_1}$  la décomposition de  $\pi$  comme dans (3). On construit  $\pi'$  en modifiant  $\pi$ . D'abord, si le bloc  $i_m$  de  $q_1$  est de taille supérieure à  $XK_0$ , alors on le remplace par  $\Delta^{XK_0}$ . Ensuite, on enlève ou raccourcit les passages de temps de  $\pi$ , pour obtenir  $\text{temps}_\Delta(\pi) \leq XK_0$ . Cela est possible par la proposition B.2, même si le bloc  $i_m$  se décompose sur  $\pi$  puisqu'on a limité la taille de ce bloc. Quand on supprime les passages de temps de  $\pi$ , on peut assurer que si  $\pi_{i_j}$  contient un passage de temps  $\tau \geq 2$ , alors il en est de même pour  $\pi'_{i_j}$ , et que si  $\text{temps}_\Delta(\pi_{i_j}) \geq K_0$ , alors  $\text{temps}_\Delta(\pi'_{i_j}) \geq K_0$ . Ainsi, on aura  $\text{Pompables}(\pi) = \text{Pompables}(\pi')$ . De plus,  $\pi'$  sera sous forme normale. On peut supposer que  $\pi'$  ne contient pas de passage de temps  $\tau$  tel que  $\text{temps}(\tau) > 0$  et  $\text{temps}_\Delta(\tau) = 0$  puisqu'il est sous forme normale (on peut les supprimer ou les fusionner avec les passages de temps voisins). Alors on a  $|\pi|_{\text{time}} \leq XK_0$ . Montrons qu'on peut également borner le nombre de transitions discrètes. On considère les transitions discrètes consécutives, séparées par des passages de temps de durée nulle. Puisque le ruban ne change pas lors de ces transitions, toute telle suite de longueur supérieure à  $|\mathcal{L}|$  contient un cycle. Cependant, on ne peut pas supprimer tous les cycles puisque l'ensemble des états de contrôles visités a une importance. On va plutôt supprimer tout cycle de durée nulle qui ne contient pas un état de contrôle qui n'est pas déjà visité. Ainsi entre chaque passage de temps de durée non-nulle, il reste grossièrement au plus  $|\mathcal{L}|^2$  transitions discrètes (un cycle par nouvel état de contrôle).  $\square$