

SYSTÈMES DE PREUVES POUR LOGIQUES MODALES

Anthony LICK,
encadré par Sylvain SCHMITZ et David BAELEDE, LSV

TABLE DES MATIÈRES

0. Fiche de Synthèse	1
0.1. Le contexte général	1
0.2. Le problème étudié	2
0.3. La contribution proposée	2
0.4. Les arguments en faveur de sa validité	2
0.5. Le bilan et les perspectives	2
1. Introduction	2
2. Premières définitions	3
2.1. Logique modale K	3
2.2. Modèle Canonique pour K	3
3. La logique K4.3	5
3.1. Modèles transitifs sans branchement	5
3.2. Modèle Canonique pour K4.3	5
3.3. Un calcul des séquents pour K4.3	6
3.4. L'axiome de GÖDEL-LÖB	9
4. La logique $K_t4.3$	11
4.1. Syntaxe et sémantique	11
4.2. Axiomatisation	12
4.3. Définitions	12
4.4. Un calcul d'hyperséquents pour $K_t4.3$	13
4.5. Calcul d'hyperséquents avec amas de mondes	13
5. Conclusion	20
Références	20

0. FICHE DE SYNTHÈSE

0.1. **Le contexte général.** Les logiques modales sont très utilisées dans divers domaines de l'informatique. Elles peuvent par exemple représenter des requêtes effectuées sur des bases de données, par exemple une requête **XPath** sur un document **XML**. Dans cette optique, on peut s'intéresser à diverses logiques modales, dont les axiomatisations permettent de forcer les modèles à avoir la forme voulue (arbres finis, mots, etc). On pourra ensuite se baser sur ces travaux pour ajouter des données aux mondes de nos modèles, et permettre à nos modalités de manipuler ces données (cf par exemple [2, 8]).

0.2. Le problème étudié. Durant mon stage, j’ai étudié différentes logiques modales sur des structures linéaires discrètes (i.e. des mots), et cherché des systèmes de preuve pour ces logiques. L’une de ces logiques (section 3.4) ne possédait jusqu’alors aucun système de preuve correct et complet ; des résultats existaient déjà pour les autres logiques étudiées pendant mon stage.

0.3. La contribution proposée. Au cours de mon stage, j’ai donné un calcul des séquents (ou d’hyperséquents) correct et complet pour chacune des logiques étudiées. En particulier, pour la dernière logique étudiée, j’ai repris un calcul d’hyperséquents existant que j’ai amélioré, et j’ai donné une stratégie de preuve pour obtenir des résultats de décidabilité et de complexité intéressants (déjà connus, mais le calcul existant ne permettait pas de les obtenir).

0.4. Les arguments en faveur de sa validité. Durant mon stage, j’ai obtenu des résultats concernant plusieurs logiques modales : le calcul des séquents pour la logique **KL4.3** (section 3.4) est inédit, et le nouveau calcul d’hyperséquents proposé pour **K_t4.3** donne lieu à un algorithme déterministe PSPACE pour la validité (le problème étant CO-NP-complet).

0.5. Le bilan et les perspectives. Par la suite, plusieurs questions pourraient être étudiées : intégrer l’axiome de GÖDEL-LÖB à la logique **K_t4.3** et modifier le calcul d’hyperséquents en conséquence, donner une méthode d’élimination des coupures pour ce calcul, ou encore rajouter des données à notre logique afin de représenter un fragment d’**XPath** apte à raisonner sur des flux de données.

1. INTRODUCTION

Les logiques modales sont largement utilisées en informatique : les logiques LTL et CTL en sont un bon exemple. Ce sont des logiques simples mais expressives, très utiles pour parler de structures relationnelles [3]. Ces logiques ont souvent la “tree(-like) model property” (si une formule a un modèle, alors elle en a un qui est un arbre), dont découlent des résultats algorithmiques intéressants. D’autre part, ces logiques sont souvent dotées d’une propriété de modèle fini, les rendant décidables. Certaines logiques modales ont également un lien avec d’autres logiques connues : par exemple la logique **K_t4.3** présentée en section 4 est équivalente à $FO^2(<)$ (logique du premier ordre à deux variables avec un ordre total) [4].

Pour résoudre le problème de validité pour ses logiques, plusieurs approches existent :

- Une axiomatisation à la HILBERT, qui ne donne pas directement de contenu algorithmique.
- Mais les modèles de ces logiques sont des structures de KRIPKE, et l’axiomatisation de la logique impose en général une forme particulière à ces structures (relations transitives, structure arborescente ou linéaire, etc). De plus, il existe souvent des bornes sur la taille de ces modèles. Cela donne alors lieu à des algorithmes combinatoires énumérant les modèles de la bonne forme et de la bonne taille, avec souvent des bornes optimales de complexité.
- D’autres méthodes utilisent des calculs des séquents (ou de manière duale, des tableaux) [5], ce qui peut conduire à des algorithmes par recherche de preuve, plus concrets, voire à des heuristiques...

C’est à ces méthodes de calculs des séquents que je me suis intéressé pendant mon stage. Cependant, les logiques modales se prêtent en général mal aux calculs des séquents, et nous sommes alors amenés à utiliser des variantes plus expressives comme des séquents étiquetés,

des séquents imbriqués ou encore des hyperséquents (où l'on manipule des multi-ensembles de séquents) comme utilisés par INDRZEJCZAK [6, 7].

Au cours de mon stage, j'ai d'abord mis au point un calcul des séquent pour la logique **K4.3** que je présente dans la section 3 (proche du calcul d'hyperséquents de INDRZEJCZAK [6]), puis un calcul des séquents pour la logique **KL4.3** dans laquelle on rajoute l'axiome de GÖDEL-LÖB [1] (section 3.4). Enfin, dans la section 4.5, j'ai établi un calcul d'hyperséquents pour la logique **K_t4.3** en améliorant celui de INDRZEJCZAK [7], et j'ai donné une stratégie fournissant un résultat de décidabilité ainsi qu'un algorithme PSPACE. En section 2, j'effectue d'abord un rappel sur les logiques modales et leur axiomatisation à la HILBERT dans le cas général de la logique **K**. Les sections suivantes s'intéresseront quant à elles aux structures totalement ordonnées (les mots) et aux calculs de séquents.

2. PREMIÈRES DÉFINITIONS

2.1. Logique modale **K**.

Définition 2.1 (syntaxe). *Nous nous intéressons à une logique modale dont la syntaxe est la suivante : $\varphi ::= \perp \mid p \mid \varphi \supset \varphi \mid \Box\varphi$ où $p \in \mathcal{V}$, \mathcal{V} étant l'ensemble des variables propositionnelles.*

Les autres opérateurs booléens usuels peuvent bien sûr s'exprimer à l'aide de \perp et \supset . Si les opérateurs booléens sont dotés de leur sémantique habituelle, il faut encore définir celle de l'opérateur \Box . Intuitivement, une formule $\Box\varphi$ est vraie si et seulement si φ est vraie dans tous les futurs possibles. Voici une définition plus formelle :

Définition 2.2 (structure, valuation et modèle). *Une structure est un couple $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ où \mathcal{W} est un ensemble (les mondes) et \mathcal{R} est une relation binaire sur \mathcal{W} .*

Étant donné une structure $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$, une valuation $\nu : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$ est une application qui associe à chaque monde de la structure un ensemble de variables propositionnelles.

Le triplet $(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \nu)$ est alors appelé modèle.

Définition 2.3 (sémantique). *Étant donné un modèle $\mathfrak{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \nu)$, pour tout $w \in \mathcal{W}$ et pour toute formule φ , on définit la sémantique de notre logique par induction structurelle sur φ :*

- $\mathfrak{M}, w \not\models \perp$
- $\mathfrak{M}, w \models p$ ssi $p \in \nu(w)$
- $\mathfrak{M}, w \models \varphi \supset \psi$ ssi si $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ alors $\mathfrak{M}, w \models \psi$
- $\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$ ssi $\forall w' \in \mathcal{W}$ tel que $w \mathcal{R} w'$, $\mathfrak{M}, w' \models \varphi$

Si $\mathfrak{M}, w \models \varphi$, on dit que w satisfait φ , ou que w est un modèle de φ .

On dit que \mathfrak{M} est un modèle de φ , et on note $\mathfrak{M} \models \varphi$, si pour tout monde w de \mathfrak{M} , $\mathfrak{M}, w \models \varphi$.

Nous pouvons aussi définir l'opérateur \Diamond , dual de l'opérateur \Box : $\Diamond\varphi ::= \neg\Box\neg\varphi$. Intuitivement, $\Diamond\varphi$ est vraie s'il existe un futur où φ est vraie : $\mathfrak{M}, w \models \Diamond\varphi$ ssi $\exists w' \in \mathcal{W}$ tel que $w \mathcal{R} w'$ et $\mathfrak{M}, w' \models \varphi$.

2.2. Modèle Canonique pour **K.** Afin de manipuler notre logique modale, il est intéressant d'avoir une notion de modèle canonique. Des résultats allant dans ce sens existent déjà, utilisant une notion de saturation (cf [3] section 4.2). Dans cette partie, nous en rappelons les principaux résultats.

Définition 2.4. Soit Λ un ensemble (éventuellement vide) d'axiomes. On note $\tilde{\Lambda}$ le plus petit ensemble contenant Λ , les tautologies propositionnelles, et clos par modus ponens (si $\varphi \in \tilde{\Lambda}$ et $\varphi \supset \psi \in \tilde{\Lambda}$ alors $\psi \in \tilde{\Lambda}$) et substitution uniforme. Si $\varphi \in \tilde{\Lambda}$, on note $\vdash_{\Lambda} \varphi$, et on note $\not\vdash_{\Lambda} \varphi$ sinon.

Pour pouvoir prouver des tautologies contenant des symboles modaux par des règles de substitution uniforme et de modus ponens, il faut se donner une axiomatisation représentant la sémantique de nos symboles modaux. Dans le cadre de la logique \mathbf{K} présentée ci-dessus, un seul axiome suffit à traiter le symbole \Box :

Définition 2.5. L'axiome \mathbf{K} suffit à axiomatiser notre logique :

$$(\mathbf{K}) \quad \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$$

Dans la suite, Λ désignera toujours un ensemble d'axiomes contenant l'axiome \mathbf{K} .

Définition 2.6 (ensemble cohérent et cohérent maximal). Soit Γ un ensemble de formules, et φ une formule. S'il existe $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Gamma$ tels que $\vdash_{\Lambda} (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \supset \varphi$, alors on note $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$.

Un ensemble de formules Γ est dit Λ -cohérent si $\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \perp$.

On dit que Γ est un ensemble Λ -cohérent maximal (Λ -MCS) s'il est Λ -cohérent et qu'il est maximal pour cette propriété (Si $\Gamma \subsetneq \Gamma'$ alors $\Gamma' \vdash_{\Lambda} \perp$).

Les Λ -MCS sont la base de notre modèle canonique : ils vont en fait servir de mondes à notre modèle. Il reste alors à trouver une relation et une valuation adéquates pour que l'ensemble des Λ -MCS forme un modèle. Dans ce sens, voici d'abord quelques propriétés intéressantes des Λ -MCS (toujours tirées de BLACKBURN et al. [3], section 4.2).

Proposition 2.7 (Propriétés des MCS). Si Γ est un Λ -MCS, alors :

- (i) Γ est clos par modus ponens : si $\varphi \supset \psi \in \Gamma$ et $\varphi \in \Gamma$, alors $\psi \in \Gamma$
- (ii) $\Lambda \subseteq \Gamma$
- (iii) Pour toute formule φ , $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$
- (iv) Pour toutes formules φ, ψ , $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ssi $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$

Le lemme suivant indique qu'on peut saturer un ensemble Λ -cohérent jusqu'à le rendre maximal.

Lemme 2.8 (Lemme de LINDENBAUM). Si Γ est un ensemble Λ -cohérent, alors il existe un Λ -MCS Γ^+ tel que $\Gamma \subseteq \Gamma^+$.

Définition 2.9 (modèle canonique). Le modèle canonique \mathfrak{M}^{Λ} d'une logique modale munie d'un ensemble d'axiomes Λ est un triplet $(\mathcal{W}^{\Lambda}, \mathcal{R}^{\Lambda}, \nu^{\Lambda})$ où :

- \mathcal{W}^{Λ} est l'ensemble des Λ -MCS.
- $\forall u, v \in \mathcal{W}^{\Lambda}, u \mathcal{R}^{\Lambda} v$ ssi pour toute formule φ , $\Box\varphi \in u \Rightarrow \varphi \in v$ (\mathcal{R}^{Λ} est appelée la relation canonique)
- ν^{Λ} est la valuation canonique définie par :

$$\begin{aligned} \nu^{\Lambda} &: \mathcal{W}^{\Lambda} &\longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{V}) \\ w &\longmapsto & w \cap \mathcal{P}(\mathcal{V}) \end{aligned}$$

Si la relation canonique \mathcal{R}^{Λ} est définie à l'aide de l'opérateur \Box , on aurait aussi pu la définir avec l'opérateur \Diamond :

Lemme 2.10. $u \mathcal{R}^{\Lambda} v$ ssi pour toute formule φ , $\varphi \in v \Rightarrow \Diamond\varphi \in u$.

Le lemme suivant exhibe une propriété très puissante de la relation \mathcal{R}^Λ , illustrant pourquoi \mathfrak{M}^Λ est un modèle intéressant.

Lemme 2.11 (Lemme d'existence). *Pour toute formule φ et pour tout monde $w \in \mathcal{W}^\Lambda$, si $\diamond\varphi \in w$ alors il existe un Λ -MCS w' tel que $w \mathcal{R}^\Lambda w'$ et $\varphi \in w'$.*

Enfin, le théorème suivant donne le lien entre un monde du modèle canonique et les formules satisfaites par ce monde.

Théorème 2.12 (Théorème du modèle canonique). *Pour toute formule φ , pour tout monde $w \in \mathfrak{M}^\Lambda$:*

$$\mathfrak{M}^\Lambda, w \models \varphi \text{ ssi } \varphi \in w$$

Le lemme 2.11 et le théorème 2.12 illustrent bien en quoi \mathfrak{M}^Λ est un modèle *canonique* : pour tout ensemble Λ -cohérent Γ , il existe un Λ -MCS Γ^+ contenant Γ , et on a ainsi : $\mathfrak{M}^\Lambda, \Gamma^+ \models \Gamma$.

Mais ce modèle canonique s'adapte aussi à l'axiomatisation, comme allons le voir dans la partie suivante.

3. LA LOGIQUE K4.3

3.1. Modèles transitifs sans branchement. Si la partie précédente présente des définitions générales, nous allons nous intéresser à un cadre plus restreint où les modèles sont *transitifs* et *sans branchement*.

Définition 3.1 (modèle transitif). *On dit qu'un modèle $(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \nu)$ est transitif si la relation \mathcal{R} est transitive, i.e. si :*

$$\forall (u, v, w) \in \mathcal{W}^3, u \mathcal{R} v \text{ et } v \mathcal{R} w \Rightarrow u \mathcal{R} w$$

Définition 3.2 (modèle sans branchement). *On dit qu'un modèle $(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \nu)$ est sans branchement vers la droite (ou trichotomique) si :*

$$\forall (u, v, w) \in \mathcal{W}^3, u \mathcal{R} v \text{ et } u \mathcal{R} w \Rightarrow (v \mathcal{R} w \text{ ou } v = w \text{ ou } w \mathcal{R} v)$$

Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement aux modèles transitifs sans branchement vers la droite. Cela revient à ajouter des axiomes à notre axiomatisation à la HILBERT :

Définition 3.3 (axiomatisation). *Les axiomes suivants forcent les modèles à être transitifs et sans branchement :*

$$(K) \quad \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$$

$$(4) \quad \diamond\diamond p \supset \diamond p$$

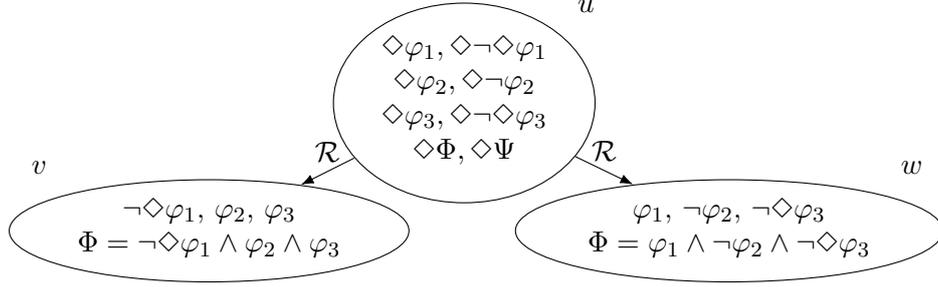
$$(.3) \quad \diamond p \wedge \diamond q \supset \diamond(p \wedge \diamond q) \vee \diamond(p \wedge q) \vee \diamond(q \wedge \diamond p)$$

*Cette axiomatisation est appelée **K4.3**.*

3.2. Modèle Canonique pour K4.3. Dans cette partie, Λ désigne les axiomes de la définition 3.3. Nous allons montrer que pour cette axiomatisation, le modèle canonique défini dans la section 2.2 est transitif et sans branchement.

Théorème 3.4. *La relation \mathcal{R}^Λ est transitive.*

Démonstration. Supposons $u \mathcal{R}^\Lambda v \mathcal{R}^\Lambda w$. Soit $\varphi \in w$, comme $v \mathcal{R}^\Lambda w$ alors $\diamond\varphi \in v$. De même, comme $u \mathcal{R}^\Lambda v$ alors $\diamond\diamond\varphi \in u$. Or u est un Λ -MCS donc contient l'axiome **4**, et par clôture par substitution, $\diamond\diamond\varphi \supset \diamond\varphi \in u$. Puis, par clôture par modus ponens, $\diamond\varphi \in u$, et finalement $u \mathcal{R}^\Lambda w$. \square

FIGURE 1. L'axiome **.3** force le modèle canonique à être trichotomique.

Théorème 3.5. *La relation \mathcal{R}^Λ est sans branchement vers la droite.*

Démonstration. Soit u, v, w des Λ -MCS tels que $u \mathcal{R}^\Lambda v$ et $u \mathcal{R}^\Lambda w$. Par l'absurde, supposons qu'on ait $v \mathcal{R}^\Lambda w$, $v \neq w$ et $w \mathcal{R}^\Lambda v$. Alors il existe respectivement φ_1, φ_2 et φ_3 telles que :

- $\varphi_1 \in w$ et $\neg\diamond\varphi_1 \in v$,
- $\varphi_2 \in v$ et $\neg\varphi_2 \in w$ et
- $\varphi_3 \in v$ et $\neg\diamond\varphi_3 \in w$.

Ainsi, $\Phi ::= \neg\diamond\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \in v$ et $\Psi ::= \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \neg\diamond\varphi_3 \in w$. De plus, comme $u \mathcal{R}^\Lambda v$ et $u \mathcal{R}^\Lambda w$, on a $\diamond\Phi, \diamond\Psi \in u$, et donc $\diamond\Phi \wedge \diamond\Psi \in u$. Or, comme u contient l'axiome **.3**, par clôture par substitution, u contient la formule suivante : $\diamond\Phi \wedge \diamond\Psi \supset \diamond(\Phi \wedge \diamond\Psi) \vee \diamond(\Phi \wedge \Psi) \vee \diamond(\Psi \wedge \diamond\Phi)$. Enfin, par modus ponens, $\diamond(\Phi \wedge \diamond\Psi) \vee \diamond(\Phi \wedge \Psi) \vee \diamond(\Psi \wedge \diamond\Phi) \in u$. Or $\diamond(\Phi \wedge \diamond\Psi) \vee \diamond(\Phi \wedge \Psi) \vee \diamond(\Psi \wedge \diamond\Phi) \vdash_\Lambda \perp$, ce qui contredit le fait que u soit un Λ -MCS. \square

3.3. Un calcul des séquents pour $\mathbf{K4.3}$. Nous présentons maintenant un calcul des séquents pour la logique $\mathbf{K4.3}$. Ce calcul des séquents est très proche d'un calcul d'hyper-séquents présenté par INDRZEJCZAK [6]. Dans toute la suite, φ, ψ désignent des formules logiques, et Γ, Δ désignent des ensembles finis de formules. Pour gérer les connecteurs booléens, notre calcul des séquents possède les règles habituelles :

$$\begin{array}{c} \overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi, \Delta} \text{ Ax} \\ \Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta \\ \hline \Gamma, \varphi \supset \psi \vdash \Delta \text{ } \supset_L \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{\Gamma, \perp \vdash \Delta} \perp \\ \Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta \\ \hline \Gamma \vdash \varphi \supset \psi, \Delta \text{ } \supset_R \end{array}$$

Si les connecteurs booléens usuels peuvent être exprimés à l'aide de \perp et \supset , les règles correspondantes peuvent également être exprimées par les règles ci-dessus. Notre calcul possède également les règles structurelles usuelles :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{ WEAK} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B} \text{ CUT}$$

Il reste alors à gérer le connecteur modal \Box , en prenant en compte la transitivité et le non branchement :

$$\frac{\left(\Gamma^\square, \square\Gamma^\square \vdash (\varphi_i)_{i \in I}, (\square\varphi_j)_{j \notin I} \right)_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}}}{\Gamma, \square\Gamma^\square \vdash \square\varphi_1, \dots, \square\varphi_n, \Delta} \quad \square\text{-RULE}$$

Pour mieux comprendre cette règle, il faut convertir l'axiome **.3** avec des connecteurs \square : $\square(p \vee \square q) \wedge \square(p \vee q) \wedge \square(q \vee \square p) \supset \square p \vee \square q$. Généralisée à n variables propositionnelles, on obtient alors exactement la règle ci-dessus. Intuitivement, puisque nos modèles sont transitifs et sans branchement, il reste à choisir l'ordre dans lequel les φ_i vont être vrais. La règle teste ainsi tous les choix possibles.

Définition 3.6. Soit $\mathfrak{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \nu)$ un modèle et $w \in \mathcal{W}$ un monde. On dit que \mathfrak{M}, w satisfait le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ (et on note $\mathfrak{M}, w \models \Gamma \vdash \Delta$) si $\mathfrak{M}, w \models \bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta$. Inversement, on dit que \mathfrak{M}, w est un contre-modèle de $\Gamma \vdash \Delta$ (et on note $\mathfrak{M}, w \not\models \Gamma \vdash \Delta$) si $\mathfrak{M}, w \not\models \bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta$, i.e. si $\mathfrak{M}, w \models \bigwedge \Gamma \wedge \neg \Delta$.

Théorème 3.7. Le calcul des séquents présenté ci-dessus est correct : tous les séquents prouvables sont valides.

Démonstration. Il suffit de vérifier que chaque règle préserve la validité. Les autres règles étant usuelles, nous allons uniquement traiter le cas de la règle \square -RULE (dans le cas où $n = 2$ pour plus de lisibilité) :

Considérons le séquent $\Gamma, \square\Gamma^\square \vdash \square\varphi_1, \square\varphi_2, \Delta$ ainsi qu'un modèle $\mathfrak{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \nu)$ et un monde $w \in \mathcal{W}$. Supposons que les trois prémisses de la règle \square -RULE appliquée à ce séquent soient valides. Alors, pour tout $w' \in \mathcal{W}$ tel que $w \mathcal{R} w'$, w' est modèle de ces 3 prémisses, donc on a $\mathfrak{M}, w' \models \bigwedge(\Gamma^\square, \square\Gamma^\square) \supset (\varphi_1 \vee \square\varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \vee \square\varphi_1)$. Alors :

- si $\mathfrak{M}, w \not\models \bigwedge \Gamma$, alors on a bien $\mathfrak{M}, w \models \Gamma, \square\Gamma^\square \vdash \square\varphi_1, \square\varphi_2, \Delta$
- sinon, si $\mathfrak{M}, w \not\models \bigwedge \square\Gamma^\square$, alors on a aussi $\mathfrak{M}, w \models \Gamma, \square\Gamma^\square \vdash \square\varphi_1, \square\varphi_2, \Delta$
- dans le cas contraire, on a alors que, pour tout $w \mathcal{R} w'$, on a $\mathfrak{M}, w' \models \bigwedge(\Gamma^\square, \square\Gamma^\square)$, donc $\mathfrak{M}, w' \models (\varphi_1 \vee \square\varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \vee \square\varphi_1)$. Ainsi, $\mathfrak{M}, w \models \square(\varphi_1 \vee \square\varphi_2) \wedge \square(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \square(\varphi_2 \vee \square\varphi_1)$, et donc (d'après l'axiome **.3**) $\mathfrak{M}, w \models \square\varphi_1 \vee \square\varphi_2$. Finalement, \mathfrak{M}, w satisfait bien le séquent de départ.

La règle \square -RULE est donc correcte. □

Théorème 3.8. Notre calcul des séquents est complet : tous les séquents valides sont prouvables.

Pour montrer ce résultat, nous allons montrer plusieurs résultats intermédiaires, inspirés des résultats concernant le modèle canonique présentés précédemment [3]. Dans la suite, nous considérerons des séquents de la forme $\Gamma \vdash \perp$, ou encore notés $\Gamma \vdash$ (on peut toujours s'y ramener en enlevant tous les termes à droite du séquent et en rajoutant leurs négations à gauche).

Définition 3.9 (séquents saturés). Soit $\Gamma \vdash$ un séquent non prouvable par notre calcul des séquents. On dit qu'il est saturé si pour toute formule φ , $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$.

Propriété 3.10 (saturation). Soit $\Gamma \vdash$ un séquent non prouvable. Il existe Γ^+ tel que $\Gamma \subset \Gamma^+$ et $\Gamma^+ \vdash$ soit saturé non prouvable.

Démonstration. Soit $(\varphi_n)_{n>0}$ une énumération des formules. On définit la suite $(\Sigma_n)_{n \geq 0}$ par :

- $\Sigma_0 = \Gamma$

- $\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si } \Sigma_n, \varphi_n \vdash \text{ non prouvable} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{sinon} \end{cases}$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $\Sigma_n \vdash$ est non prouvable.

- $\Sigma_0 = \Gamma$ est non prouvable.
- Par hypothèse de récurrence, supposons $\Sigma_n \vdash$ non prouvable. Par l'absurde, supposons que $\Sigma_n, \varphi_n \vdash$ et $\Sigma_n, \neg\varphi_n \vdash$ soient tous les deux prouvables (appelons \mathbb{P} et \mathbb{P}' leurs preuves). Alors $\Sigma_n \vdash$ serait prouvable, contradiction :

$$\frac{\frac{\frac{\mathbb{P}}{\Sigma_n, \varphi \vdash \perp}}{\Sigma_n \vdash \neg\varphi} \neg\text{R} \quad \frac{\frac{\mathbb{P}'}{\Sigma_n, \neg\varphi \vdash \perp}}{\Sigma_n \vdash \varphi} \neg\text{R}}{\Sigma_n \vdash \neg\varphi \wedge \varphi} \wedge\text{R} \quad \frac{\frac{\frac{\neg\varphi, \varphi \vdash \perp}{\neg\varphi \wedge \varphi \vdash \perp} \text{AX}}{\neg\varphi \wedge \varphi \vdash \perp} \wedge\text{L}}{\Sigma_n \vdash \perp} \text{CUT}}$$

Ainsi, tous les Σ_n sont non prouvables, et ils forment une suite croissante convergeant à l'infini vers un Γ^+ saturé non prouvable. \square

Remarque 3.11. On remarquera l'utilisation de coupures dans la preuve ci-dessus. Nous obtiendrons donc une preuve de complétude avec coupures. Nous verrons plus tard (section 3.4) qu'en rajoutant un axiome à notre logique pour avoir des modèles bien fondés, nous obtiendrons une preuve de complétude sans coupures. \square

L'idée de cette preuve est de manipuler les séquents non prouvables par notre calcul des séquents comme les ensembles cohérents de la partie précédente. Maintenant que nous savons les saturer, nous allons voir qu'ils possèdent des propriétés similaires qui vont permettre de constituer un contre-modèle canonique.

Définition 3.12. Dans la suite, on considérera le modèle $\mathfrak{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \nu)$ suivant :

- \mathcal{W} est l'ensemble des Γ tels que $\Gamma \vdash$ est non prouvable saturé.
- $\forall u, v \in \mathcal{W}, u \mathcal{R} v$ ssi pour toute formule φ , $\Box\varphi \in u \Rightarrow \varphi \in v$
- ν est la valuation définie par :

$$\begin{aligned} \nu & : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}) \\ w & \longmapsto w \cap \mathcal{P}(\mathcal{V}) \end{aligned}$$

Propriété 3.13 (propriété du successeur). Si $\Box\Gamma, \Diamond\varphi, \Gamma' \vdash \perp$ n'est pas prouvable, alors $\Gamma, \varphi \vdash \perp$ n'est pas prouvable.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\Gamma, \varphi \vdash \perp$ possède une preuve \mathbb{P} .

Alors $\Box\Gamma, \Diamond\varphi, \Gamma' \vdash \perp$ serait prouvable :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\mathbb{P}}{\Gamma, \varphi \vdash \perp}}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \neg}{\Box\Gamma, \Gamma \vdash \neg\varphi} \text{WEAK}}{\Box\Gamma \vdash \Box\neg\varphi} \Box\text{-RULE}}{\Box\Gamma, \Diamond\varphi, \Gamma' \vdash \perp} \neg+\text{WEAK}$$

\square

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\text{Ax}}{p \vdash p} \quad \frac{\text{Ax}}{\Box q \vdash \Box q}}{\vee L} \quad \frac{\frac{\text{Ax}}{p \vdash p} \quad \frac{\text{Ax}}{q \vdash q}}{\vee L} \quad \frac{\frac{\text{Ax}}{q \vdash q} \quad \frac{\text{Ax}}{\Box p \vdash \Box p}}{\vee L}}{\frac{p \vee \Box q \vdash p, \Box q \quad p \vee q \vdash p, q \quad q \vee \Box p \vdash \Box p, q}}{\frac{\Box(p \vee \Box q), \Box(p \vee q), \Box(q \vee \Box p) \vdash \Box p, \Box q}{\Box}} \quad \Box \\
 \hline
 \vdash \Box(p \vee \Box q) \wedge \Box(p \vee q) \wedge \Box(q \vee \Box p) \supset \Box p \vee \Box q \quad \supset R
 \end{array}$$

FIGURE 2. Preuve de l'axiome **.3**. Certaines formules non utilisées dans cette preuve sont omises dans les prémisses pour plus de lisibilité.

En saturant le séquent $\Gamma, \varphi \vdash \perp$, on obtient alors un résultat similaire au lemme 2.11. D'autres résultats peuvent être obtenus, comme la propriété de saturation (2.7) ou la seconde caractérisation de la relation \mathcal{R} (2.10).

De plus, les axiomes étant prouvables par notre calcul des séquents (cf figure 2), les séquents saturés contiennent donc toutes les instances possibles des axiomes, permettant de prouver que notre modèle est bien transitif et trichotomique. Enfin, le résultat suivant indique que toute formule non prouvable possède un contre-modèle :

Théorème 3.14 (Théorème de vérité). *Soit S un séquent saturé, et φ une formule. Alors $\mathfrak{M}, S \vDash \varphi$ si, et seulement si $\varphi \in S$.*

Démonstration. Ce résultat se prouve par induction structurelle sur φ :

- Si $\varphi = p \in \mathcal{V}$, le résultat est immédiat par définition de notre valuation ν .
- Si $\varphi = \Diamond \psi$, alors $\mathfrak{M}, S \vDash \Diamond \psi$ ssi il existe S' tel que $S \mathcal{R} S'$ et $\mathfrak{M}, S' \vDash \psi$, i.e. $\psi \in S'$ par hypothèse de récurrence, ce qui implique que $\Diamond \psi \in S$ (car $S \mathcal{R} S'$). Réciproquement, si $\Diamond \psi \in S$, alors par le lemme d'existence il existe S' tel que $S \mathcal{R} S'$ et $\psi \in S'$.
- Le cas des connecteurs logiques sont traités à l'aide des propriétés de saturation. \square

Ainsi, pour chaque formule non prouvable, il existe un monde de notre modèle (obtenu par saturation) qui constitue un contre-modèle de cette formule. Notre calcul des séquents étant maintenant prouvé correct et complet, on peut remarquer que les séquents non prouvables saturés coïncident exactement avec les Λ -MCS pour la logique **K4.3**, et donc que le modèle obtenu est en fait le modèle canonique pour **K4.3**.

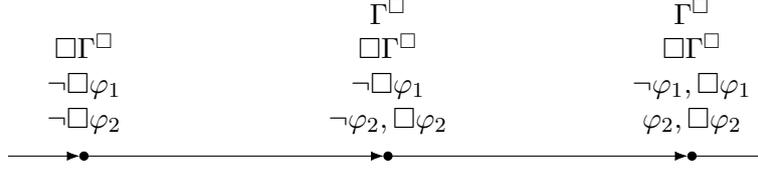
3.4. L'axiome de GÖDEL-LÖB. Dans l'optique d'étudier par la suite des logiques à données représentant des requêtes **XPath** (comme dans [2, 8]), nous voulons également éviter d'avoir des modèles infinis (car dans ce cas précis les modèles sont en réalité des arbres de données **XML** finis). Dans cette section, nous allons donc rajouter un axiome à notre axiomatisation précédente afin de rendre les modèles *biens fondés* : l'axiome **GL**, présenté par AVRON [1] et utilisé dans [2, 8].

Définition 3.15 (axiome de GÖDEL-LÖB). *Nous rajoutons à l'axiomatisation **K4.3** l'axiome suivant (appelé axiome de GÖDEL-LÖB) :*

$$(GL) \quad \Box(\Box p \supset p) \supset \Box p$$

*Cette nouvelle axiomatisation est appelée **KL4.3**.*

Pour tenir compte du nouvel axiome, nous devons modifier la règle \Box , en nous inspirant de la méthode décrite par AVRON [1] :

FIGURE 3. Correction de la règle \square modifiée pour l'axiome **GL**.

$$\frac{\left(\Gamma^\square, \square\Gamma^\square, \square\varphi_k \vdash (\varphi_i)_{i \in I}, (\square\varphi_j)_{j \notin I}\right)_{1 \leq k \leq n, \emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}}}{\Gamma, \square\Gamma^\square \vdash \square\varphi_1, \dots, \square\varphi_n, \Delta} \square\text{-RULE}$$

Nous avons donc modifié les prémisses (et leur nombre) en rajoutant l'une des formules $\square\varphi_k$ aux hypothèses des séquents. Cette règle est correcte, nous obtenons donc toujours un calcul des séquents correct :

Théorème 3.16. *Le calcul des séquents pour **KL4.3** est correct.*

Démonstration. Nous prouvons la correction de la nouvelle règle \square pour le cas $n = 2$ pour plus de lisibilité. Supposons que le séquent conclusion $\Gamma, \square\Gamma^\square \vdash \square\varphi_1, \square\varphi_2, \Delta$ admette un contre-modèle \mathfrak{M}, w fini. On a donc $\mathfrak{M}, w \vDash \square\Gamma^\square \wedge \neg\square\varphi_1 \wedge \neg\square\varphi_2$. Soit w' un monde maximal tel que $w \mathcal{R} w'$ et $\mathfrak{M}, w' \vDash \neg\varphi_1$ (un tel monde existe car \mathfrak{M} est fini). w' étant choisi maximal, on a $\mathfrak{M}, w' \vDash \square\varphi_1$. De plus, comme $w \mathcal{R} w'$, on a $\mathfrak{M}, w' \vDash \Gamma^\square, \square\Gamma^\square$. Alors :

- Si $\mathfrak{M}, w' \vDash \neg\varphi_2$ (resp. $\mathfrak{M}, w' \vDash \neg\square\varphi_2$), alors $\mathfrak{M}, w' \not\vDash \Gamma^\square, \square\Gamma^\square, \square\varphi_1 \vdash \varphi_1, \varphi_2$ (resp. $\mathfrak{M}, w' \not\vDash \Gamma^\square, \square\Gamma^\square, \square\varphi_1 \vdash \varphi_1, \square\varphi_2$).
- Sinon, on a $\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi_2 \wedge \square\varphi_2$. Or, $\mathfrak{M}, w \vDash \neg\square\varphi_2$, donc il existe w'' tel que $w \mathcal{R} w'' \mathcal{R} w'$ et $\mathfrak{M}, w'' \vDash \neg\varphi_2$. En prenant w'' maximal pour cette propriété, on a alors également $\mathfrak{M}, w'' \vDash \square\varphi_2$. De plus, comme $w'' \mathcal{R} w'$, on a $\mathfrak{M}, w'' \vDash \neg\square\varphi_1$. Ainsi, on a $\mathfrak{M}, w'' \vDash \Gamma^\square, \square\Gamma^\square, \square\varphi_2 \vdash \square\varphi_1, \varphi_2$.

Dans tous les cas, l'une des prémisses de la règle admet un contre-modèle. Cette règle est donc correcte. \square

Il nous reste à montrer la complétude de ce calcul. La preuve suivante nous donne même une complétude sans coupures et sans affaiblissement : nous conservons les règles propositionnelles dans notre calcul, mais nous enlevons les règles structurelles.

Théorème 3.17. *Le calcul des séquents pour **KL4.3** est complet.*

Démonstration. Supposons qu'un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ ne soit pas prouvable par notre calcul des séquents. Soit \mathbb{P} une tentative de preuve de ce séquent, possédant une branche d'échec \mathbb{B} (on remarquera que cette branche est finie, car toutes les règles ont la propriété de la sous-formule). Nous allons construire un contre-modèle du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ à partir de cette branche d'échec. Soit n le nombre de fois que la règle \square apparaît dans \mathbb{B} . Nous construisons un modèle \mathfrak{M} de taille $n + 1$ dont les mondes sont $\mathcal{W} = \{w_0, \dots, w_n\}$ et la relation \mathcal{R} est définie par : $w_i \mathcal{R} w_j$ ssi $i < j$ (elle est donc bien transitive et trichotomique).

Considérons d'abord le dernier séquent $\Pi \vdash \Sigma$ de la branche \mathbb{B} . La branche \mathbb{B} étant une branche d'échec, aucune règle n'est applicable à ce séquent. En particulier, toutes les formules de Σ sont atomiques (sinon on pourrait appliquer la règle $\supset R$ ou la règle \square), et les formules de Π sont atomiques ou de la forme $\square\varphi$ (sinon on pourrait appliquer la règle $\supset L$). De plus, on ne peut pas non plus appliquer la règle AX (Π et Σ n'ont pas d'atomes

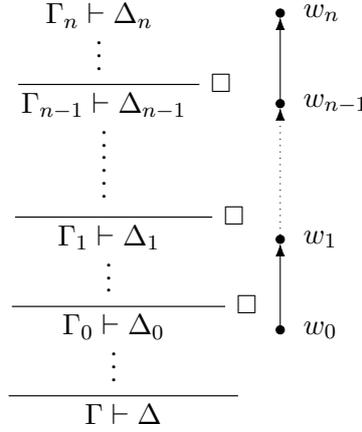


FIGURE 4. Construction du contre-modèle pour la preuve de complétude du calcul des séquents pour **KL4.3**.

en commun) ou la règle \perp ($\perp \notin \Pi$). On peut donc attribuer à w_n une valuation satisfaisant toutes les formules de Π (les formules de la forme $\Box\varphi$ sont satisfaites car w_n n'a pas de successeur) et aucune formule de Σ .

On peut ensuite prouver que lorsqu'on redescend le long de la branche \mathbb{B} , tant qu'on rencontre des règles propositionnelles, \mathfrak{M}, w_n est toujours un contre-modèle du séquent rencontré. Lorsqu'on rencontre une règle \Box pour la première fois, nous allons attribuer une valuation au monde w_{n-1} . Soit $\Gamma', \Box\Gamma^\Box \vdash \Box\varphi_1, \dots, \Box\varphi_n, \Delta'$ le séquent conclusion de la règle \Box . Γ^\Box étant présent dans toutes les prémisses (donc dans celle de la branche \mathbb{B}), satisfaire $\Box\Gamma^\Box$ en w_{n-1} n'est pas un problème (car $\Box\Gamma^\Box$ et Γ^\Box sont satisfaits en w_n). De plus, pour tout i , φ_i ou $\Box\varphi_i$ apparaît dans la prémisse de la branche \mathbb{B} . Dans les deux cas, $\Box\varphi_i$ n'est pas satisfaite en w_{n-1} . Enfin, on peut trouver une valuation satisfaisant toutes les formules de Γ' et aucune formule de Δ' : pour s'en convaincre, on peut essayer de prouver $\Gamma' \vdash \Delta'$ (ce qui est impossible car sinon le séquent conclusion de la règle \Box serait prouvable, contradiction avec le fait que \mathbb{B} soit une branche d'échec) et réitérer le processus.

Ainsi, en continuant à descendre le long de la branche \mathbb{B} , on construit une valuation pour tous les mondes de \mathfrak{M} , et on obtient à la fin un contre-modèle \mathfrak{M}, w_0 pour le séquent initial $\Gamma \vdash \Delta$. Ce calcul des séquents est donc complet. \square

4. LA LOGIQUE $K_t4.3$

Nous nous intéressons maintenant à une extension de la logique précédente. Si nous disposons avant d'un opérateur modal pour parler du futur, nous en aurons désormais un autre pour parler du passé.

4.1. Syntaxe et sémantique.

Définition 4.1 (syntaxe). *Notre logique possède la syntaxe suivante :*

$\varphi ::= \perp \mid p \mid \varphi \supset \varphi \mid \boxminus\varphi \mid \boxplus\varphi$ où $p \in \mathcal{V}$, \mathcal{V} étant l'ensemble des variables propositionnelles.

Comme précédemment, les autres connecteurs logiques usuels peuvent être définis à l'aide de \perp de \supset . De plus, on définit les duals des opérateurs \boxminus (respectivement \boxplus) par

$\diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$ (respectivement $\diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$). D'autres notations existent pour les symboles modaux de cette logique (utilisés notamment par BLACKBURN et al. [3]) : F pour \diamond (*future*), G pour \Box (*globally*), P pour \diamond (*past*), H pour \Box (*historically*).

Concernant la structure de nos modèles, elle devrait normalement posséder deux relations \mathcal{R}^\rightarrow et \mathcal{R}^\leftarrow (une pour chaque symbole modal). Cependant, notre axiomatisation va forcer ces deux relations à coïncider : on aura $w \mathcal{R}^\rightarrow w'$ si et seulement si $w' \mathcal{R}^\leftarrow w$ (cf BLACKBURN et al. [3], section 4.3). Il est donc inutile de considérer deux relations distinctes, et on utilisera alors la même structure que pour les modèles de la partie précédente.

Définition 4.2 (sémantique). *Étant donné un modèle $(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \nu)$, pour tout $w \in \mathcal{W}$ et pour toute formule φ , on définit la sémantique de notre logique par induction structurelle sur φ :*

- $w \not\models \perp$
- $w \models p$ ssi $p \in \nu(w)$
- $w \models \varphi \supset \psi$ ssi si $w \models \varphi$ alors $w \models \psi$
- $w \models \Box\varphi$ ssi $\forall w' \in \mathcal{W}$ tel que $w \mathcal{R} w'$, $w' \models \varphi$
- $w \models \diamond\varphi$ ssi $\exists w' \in \mathcal{W}$ tel que $w' \mathcal{R} w$, $w' \models \varphi$

4.2. Axiomatisation. Nous voulons toujours avoir des modèles transitifs et trichotomiques, notre axiomatisation reprendra donc les mêmes axiomes que **K4.3** pour chaque symbole modal. Il faut encore y rajouter des axiomes exprimant que \mathcal{R}^\rightarrow et \mathcal{R}^\leftarrow coïncident. Grâce à ces derniers, il suffira d'avoir l'axiome de transitivité dans une direction pour avoir transitivité dans l'autre. Il faudra cependant donner les axiomes **K** et de trichotomie dans les deux directions.

Définition 4.3 ($K_t4.3$). *Notre logique possède les axiomes suivants :*

- (K_r) $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$
- (K_ℓ) $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$
- (4) $\diamond\diamond p \supset \diamond p$
- (.3 $_r$) $\diamond p \wedge \diamond q \supset \diamond(p \wedge \diamond q) \vee \diamond(p \wedge q) \vee \diamond(q \wedge \diamond p)$
- (.3 $_l$) $\diamond p \wedge \diamond q \supset \diamond(p \wedge \diamond q) \vee \diamond(p \wedge q) \vee \diamond(q \wedge \diamond p)$
- (t_r) $p \supset \Box\diamond p$
- (t_ℓ) $p \supset \Box\diamond p$

Cette axiomatisation est appelée **K_t4.3**

4.3. Définitions. Avec cette axiomatisation, la relation \mathcal{R} d'un modèle sera transitive et sans branchement vers la gauche et vers la droite : on parle alors d'un *ordre total faible*. Une telle relations peut posséder des *amas* :

Définition 4.4 (amas de mondes). *Soit $\mathfrak{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \nu)$ un modèle transitif. Un amas de mondes dans \mathfrak{M} est un sous-ensemble de mondes $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$ telle que la restriction de \mathcal{R} à \mathcal{A} est une relation d'équivalence, et qui est maximal pour cette propriété (i.e. ce n'est pas le cas pour tout ensemble \mathcal{B} tel que $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$).*

À partir d'un modèle d'une formule muni d'un ordre total faible, on peut créer un modèle muni d'un *ordre total strict* satisfaisant cette même formule (un modèle sans amas). Une telle transformation augmente en général le nombre de mondes : on peut passer d'un modèle fini à un modèle infini, mais un ordre total strict a l'avantage de pouvoir être représenté simplement par une liste de mondes. C'est cette approche qu'a choisi INDRZEJCZAK [7].

Définition 4.5 (modèles avec et sans amas). *On appelle $K_t4.3$ -modèle avec amas un modèle muni d'un ordre total faible. On appelle $K_t4.3$ -modèle sans amas un modèle muni d'un ordre total strict.*

4.4. Un calcul d'hyperséquents pour $K_t4.3$. Dans cette section, nous présentons le calcul d'INDRZEJCZAK [7] pour la logique $K_t4.3$ et utilisons d'hyperséquents ordonnés. Usuellement, un calcul d'hyperséquents est un ensemble de règles de calcul manipulant un multi-ensemble de séquents. Cependant, dans cette partie nous manipulerons une liste ordonnée de séquents, et nous verrons alors cette liste comme un potentiel contre-modèle, et chaque séquent de la liste comme un monde de ce contre-modèle.

Dans la suite, si deux séquents s et s' appartiennent au même hyperséquent H , nous noterons $s < s'$ si s apparaît avant s' dans H .

Définition 4.6. *Soit \mathfrak{M} un $K_t4.3$ -modèle sans amas et $H = s_1 | \dots | s_n$ un hyperséquent. On dit que \mathfrak{M} satisfait H , et on note $\mathfrak{M} \models H$, ssi pour tous $w_1, \dots, w_n \in \mathfrak{M}$, si $w_1 \mathcal{R} \dots \mathcal{R} w_n$, alors il existe $i \leq n$ tel que $\mathfrak{M}, w_i \models s_i$.*

On dit que H est valide, et on note $\vDash H$, si $\mathfrak{M} \models H$ pour tout $K_t4.3$ -modèle \mathfrak{M} .

Voici le calcul d'hyperséquents proposé par INDRZEJCZAK [7] :

$$\begin{array}{c}
 \text{Ax} \frac{}{H_1 \mid \varphi, \Gamma \vdash \Delta, \varphi \mid H_2} \quad \frac{}{H_1 \mid \Gamma, \perp \vdash \Delta \mid H_2} \perp \\
 \\
 \text{C}\vdash \frac{H_1 \mid \varphi, \varphi, \Gamma \vdash \Delta \mid H_2}{H_1 \mid \varphi, \Gamma \vdash \Delta \mid H_2} \quad \frac{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi \mid H_2}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \varphi \mid H_2} \vdash\text{C} \\
 \\
 \text{C}\supset \frac{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \varphi \mid H_2 \quad H_1 \mid \psi, \Gamma \vdash \Delta \mid H_2}{H_1 \mid \varphi \supset \psi, \Gamma \vdash \Delta \mid H_2} \quad \frac{H_1 \mid \varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi \mid H_2}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \varphi \supset \psi \mid H_2} \vdash\text{C}\supset \\
 \\
 \text{C}\boxplus \vdash \frac{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \dots \mid \varphi, \Pi \vdash \Sigma \mid H_2}{H_1 \mid \boxplus \varphi, \Gamma \vdash \Delta \mid \dots \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2} \quad \frac{H \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \vdash \varphi}{H \mid \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi} \vdash \boxplus \\
 \\
 \text{C}\boxminus \vdash \frac{H_1 \mid \varphi, \Gamma \vdash \Delta \mid \dots \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \dots \mid \boxminus \varphi, \Pi \vdash \Sigma \mid H_2} \quad \frac{\vdash \varphi \mid \Gamma \vdash \Delta \mid H}{\Gamma \vdash \Delta, \boxminus \varphi \mid H} \vdash \boxminus \\
 \\
 \frac{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \vdash \varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2 \quad H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \Pi \vdash \Sigma, \varphi \mid H_2 \quad H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \Pi \vdash \Sigma, \boxplus \varphi \mid H_2}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2} \vdash \boxplus' \\
 \\
 \frac{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \vdash \varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2 \quad H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2 \quad H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \boxminus \varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \Pi \vdash \Sigma, \boxminus \varphi \mid H_2} \vdash \boxminus'
 \end{array}$$

Si ce calcul est prouvé correct et complet, la preuve de complétude ne permet cependant pas d'en déduire un résultat de complexité voire même de décision. En effet, si cette logique possède une propriété de petit modèle (cf BLACKBURN et al. [3] et ONO&NAKAMURA [9]), ce dernier est en général doté d'amas de mondes fortement connexes, ce qu'une liste de mondes est incapable de représenter. Pour palier à ce problème, nous allons modifier ce calcul en utilisant non plus une liste de mondes, mais une liste d'ensembles de mondes.

4.5. Calcul d'hyperséquents avec amas de mondes. Dans cette section, nous modifions le calcul d'hyperséquents ordonnés d'INDRZEJCZAK [7] pour représenter un ordre total

faible : notre calcul manipule une liste dont les cellules contiennent soit un unique séquent, soit un ensemble non vide de séquents (un *amas* de séquents, en parallèle avec les amas de mondes). Comme dans la partie précédente, si un séquent S apparaît dans un hyperséquent H strictement avant un séquent S' , on notera $S < S'$, et le modèle sous-jacent possédera la relation $S \mathcal{R} S'$. De plus, si S et S' appartiennent à un même amas de séquents, on notera $S \sim S'$, et le modèle sous-jacent possédera également la relation $S \mathcal{R} S'$ (tous les mondes d'un même amas sont en relation). En particulier, le modèle possédera la relation $S \mathcal{R} S$ pour chaque séquent S apparaissant dans un amas.

Un hyperséquent avec une cellule contenant un unique séquent S sera noté sous la forme $H_1 \mid S \mid H_2$. Un hyperséquent avec une cellule contenant un amas de séquents S, S', \dots sera noté sous la forme $H_1 \mid \{S \parallel S' \parallel \dots\} \mid H_2$. En particulier, on remarquera la différence entre $H_1 \mid S \mid H_2$ et $H_1 \mid \{S\} \mid H_2$: seul le modèle du dernier cas possède la relation $S \mathcal{R} S$.

Comme dans la partie précédente, nous voyons un hyperséquent comme un potentiel contre-modèle, à la différence près qu'il peut posséder des amas de mondes. Nous devons donc modifier les règles du calcul de INDRZEJCZAK [7] pour tester de nouveaux choix possibles, et rajouter des règles pour gérer les nouveaux cas de figure.

Commençons par la règle $\boxplus \vdash$ du calcul de INDRZEJCZAK. Cette règle est toujours correcte, mais d'autres cas peuvent désormais se présenter : le séquent $\boxplus\varphi, \Gamma \vdash \Delta$ peut être désormais dans un amas, de même que le séquent $\Pi \vdash \Sigma$ où l'on veut envoyer la formule φ . Ces deux séquents pourraient même faire partie du même amas (et dans ce cas être éventuellement le même séquent). Pour éviter d'écrire une règle pour chaque cas possible, nous introduisons une nouvelle notation :

Définition 4.7. Soit H un hyperséquent, et soit p et p' deux positions dans H . Soit S et S' deux séquents. On note $H[S][S']_{p,p'}$ l'hyperséquent H dans lequel on a remplacé le séquent à la position p (respectivement p') par S (respectivement S').

Si de plus $p < p'$ (respectivement $p \sim p'$), on pourra noter ce séquent $H[S][S']_{p < p'}$ (respectivement $H[S][S']_{p \sim p'}$).

Les règles $\boxplus \vdash$ et $\boxminus \vdash$ s'écrivent alors :

$$\frac{H[\Gamma \vdash \Delta][\varphi, \Pi \vdash \Sigma]_{p \lesssim p'}}{H[\boxplus\varphi, \Gamma \vdash \Delta][\Pi \vdash \Sigma]_{p \lesssim p'}} \boxplus \vdash \qquad \frac{H[\varphi, \Gamma \vdash \Delta][\Pi \vdash \Sigma]_{p \lesssim p'}}{H[\Gamma \vdash \Delta][\boxminus\varphi, \Pi \vdash \Sigma]_{p \lesssim p'}} \boxminus \vdash$$

Si les règles précédentes se comportaient de la même manière, que les séquents considérés soient ou non dans un amas, ce n'est pas le cas des règles suivantes. C'est pourquoi nous devons écrire une règle pour chaque cas.

Si la règle $\vdash \boxplus$ de INDRZEJCZAK [7] considère uniquement la possibilité d'ajouter un monde à la fin de notre contre-modèle, il faut désormais aussi tester si le dernier monde ne devrait pas en fait être dans un amas :

$$\frac{H \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \vdash \varphi \quad H \mid \{\Gamma \vdash \Delta, \boxplus\varphi\}}{H \mid \Gamma \vdash \Delta, \boxplus\varphi} \vdash \boxplus$$

Mais nous devons désormais aussi gérer le cas où ce dernier séquent est dans un amas. Dans ce cas, plusieurs choix s'offrent à nous : ajouter une nouvelle cellule après l'amas, ajouter une nouvelle cellule dans l'amas, ou envoyer φ dans une cellule de l'amas :

$$\frac{H \mid \{\dots \parallel \Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid \vdash \varphi \quad H \mid \{\dots \parallel \Gamma \vdash \Delta \parallel \vdash \varphi \parallel \dots\}}{(H \mid \{\dots \parallel \Gamma \vdash \Delta \parallel \dots \parallel \Pi \vdash \Sigma, \varphi \parallel \dots\})_{\Pi \vdash \Sigma \sim \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi}} \{ \vdash \boxplus \}$$

$$\frac{}{H \mid \{\dots \parallel \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi \parallel \dots\}}$$

De manière analogue, nous obtenons les règles généralisant la règle $\vdash \boxplus$ de INDRZEJCZAK [7] :

$$\frac{\vdash \varphi \mid \Gamma \vdash \Delta \mid H \quad \{\Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi\} \mid H}{\Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi \mid H} \vdash \boxplus$$

$$\frac{\vdash \varphi \mid \{\dots \parallel \Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid H \quad \{\dots \parallel \Gamma \vdash \Delta \parallel \vdash \varphi \parallel \dots\} \mid H}{(\{\dots \parallel \Gamma \vdash \Delta \parallel \dots \parallel \Pi \vdash \Sigma, \varphi \parallel \dots\} \mid H)_{\Pi \vdash \Sigma \sim \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi}} \{ \vdash \boxplus \}$$

$$\frac{}{\{\dots \parallel \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi \parallel \dots\} \mid H}$$

Il reste à généraliser les règles $\vdash \boxplus'$ et $\vdash \boxplus''$ de INDRZEJCZAK [7]. Il y a 4 cas à gérer pour chaque règle, selon si les séquents $\Gamma \vdash \Delta$ et $\Pi \vdash \Sigma$ sont dans des amas ou non. Dans chacun des cas, il faudra de nouvelles prémisses gérant les cas des amas, comme pour les règles précédentes. Par exemple, dans le cas sans amas, il faut rajouter une prémisses considérant le cas où le monde correspondant au séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est en fait dans un amas :

$$\frac{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \vdash \varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2 \quad H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \Pi \vdash \Sigma, \boxplus \varphi \mid H_2}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \Pi \vdash \Sigma, \varphi \mid H_2 \quad H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi\} \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2} \vdash \boxplus \mid _$$

$$\frac{}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2}$$

Pour le cas où $\Pi \vdash \Sigma$ est dans un amas, il suffit juste de modifier légèrement la règle ci-dessus pour gérer correctement l'amas :

$$\frac{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \vdash \varphi \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid H_2 \quad H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \{\Pi \vdash \Sigma, \varphi \parallel \dots\} \mid H_2}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \{\Pi \vdash \Sigma, \boxplus \varphi \parallel \dots\} \mid H_2 \quad H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi\} \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid H_2} \vdash \boxplus \mid \{ _ \}$$

$$\frac{}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid H_2}$$

Il reste alors à gérer les cas où le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est dans un amas :

$$\frac{H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid \vdash \varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2 \quad H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid \Pi \vdash \Sigma, \boxplus \varphi \mid H_2}{(H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots \parallel \Gamma' \vdash \Delta', \varphi \parallel \dots\} \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2)_{\Gamma' \vdash \Delta' \sim \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi}} \{ \vdash \boxplus \} \mid _$$

$$\frac{}{H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi \parallel \dots\} \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2}$$

$$\frac{H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid \vdash \varphi \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid H_2 \quad H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid \{\Pi \vdash \Sigma, \varphi \parallel \dots\} \mid H_2 \quad H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid \{\Pi \vdash \Sigma, \boxplus \varphi \parallel \dots\} \mid H_2}{(H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots \parallel \Gamma' \vdash \Delta', \varphi \parallel \dots\} \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid H_2)_{\Gamma' \vdash \Delta' \sim \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi}} \{ \vdash \boxplus \} \mid \{ _ \}$$

$$\frac{}{H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi \parallel \dots\} \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid H_2}$$

De manière symétrique, voici les 4 règles correspondant au symbole \boxminus :

$$\frac{H_1 \mid \Pi \vdash \Sigma \mid \vdash \varphi \mid \Gamma \vdash \Delta \mid H_2 \quad H_1 \mid \Pi \vdash \Sigma, \boxminus \varphi \mid \Gamma \vdash \Delta \mid H_2}{H_1 \mid \Pi \vdash \Sigma, \varphi \mid \Gamma \vdash \Delta \mid H_2 \quad H_1 \mid \Pi \vdash \Sigma \mid \{\Gamma \vdash \Delta, \boxminus \varphi\} \mid H_2} _ \mid \vdash \boxminus$$

$$\frac{}{H_1 \mid \Pi \vdash \Sigma \mid \Gamma \vdash \Delta, \boxminus \varphi \mid H_2}$$

$$\frac{H_1 \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid \vdash \varphi \mid \Gamma \vdash \Delta \mid H_2 \quad H_1 \mid \{\Pi \vdash \Sigma, \varphi \parallel \dots\} \mid \Gamma \vdash \Delta \mid H_2}{H_1 \mid \{\Pi \vdash \Sigma, \boxplus \varphi \parallel \dots\} \mid \Gamma \vdash \Delta \mid H_2 \quad H_1 \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid \{\Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi\} \mid H_2} \{ _ \} \mid \vdash \boxplus$$

$$\frac{H_1 \mid \Pi \vdash \Sigma \mid \vdash \varphi \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid H_2 \quad H_1 \mid \Pi \vdash \Sigma, \varphi \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid H_2 \quad H_1 \mid \Pi \vdash \Sigma, \boxplus \varphi \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid H_2}{(H_1 \mid \Pi \vdash \Sigma \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots \parallel \Gamma' \vdash \Delta', \varphi \parallel \dots\} \mid H_2)_{\Gamma' \vdash \Delta' \sim \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi}} _ \mid \{\vdash \boxplus\}$$

$$\frac{}{H_1 \mid \Pi \vdash \Sigma \mid \{\Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi \parallel \dots\} \mid H_2}$$

$$\frac{H_1 \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid \vdash \varphi \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid H_2 \quad H_1 \mid \{\Pi \vdash \Sigma, \varphi \parallel \dots\} \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid H_2 \quad H_1 \mid \{\Pi \vdash \Sigma, \boxplus \varphi \parallel \dots\} \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots\} \mid H_2}{(H_1 \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid \{\Gamma \vdash \Delta \parallel \dots \parallel \Gamma' \vdash \Delta', \varphi \parallel \dots\} \mid H_2)_{\Gamma' \vdash \Delta' \sim \Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi}} \{ _ \} \mid \{\vdash \boxplus\}$$

$$\frac{}{H_1 \mid \{\Pi \vdash \Sigma \parallel \dots\} \mid \{\Gamma \vdash \Delta, \boxplus \varphi \parallel \dots\} \mid H_2}$$

Tout comme le calcul de INDRZEJCZAK [7], ces nouvelles règles constituent un calcul correct et complet.

Théorème 4.8. *Le calcul d'hyperséquents avec amas est correct et complet.*

Ce résultat se démontre de la même manière que pour le calcul initial de INDRZEJCZAK [7]. Pour la correction, certaines règles sont les mêmes que pour le calcul de INDRZEJCZAK [7] mais avec plus de prémisses, les autres peuvent être prouvées correctes de la même manière. Pour la complétude, on construit comme dans la preuve de INDRZEJCZAK [7] un contre-modèle de l'hyperséquent que l'on tentait de prouver à partir d'une branche d'échec. Il suffit de modifier légèrement la preuve de INDRZEJCZAK [7] pour l'adapter aux amas. Cependant, le contre-modèle extrait de cette branche d'échec pourrait être infini (la branche d'échec elle-même pourrait être infinie). Pourtant, cette logique possède des propriétés de décidabilité (et même de complexité) :

Propriété 4.9 (modèle fini). *Soit \mathfrak{M} un modèle d'une formule φ . Alors il existe un modèle \mathfrak{M}' fini qui satisfait φ .*

Ce modèle \mathfrak{M}' est obtenu à partir de \mathfrak{M} en effectuant une filtration (cf BLACKBURN et al. [3], section 2.3 et ONO&NAKAMURA [9], théorème 3 pour plus de détails). Ce résultat indique que cette logique est décidable, mais un autre résultat nous donne en plus une borne NP pour la satisfiabilité (cette logique est en réalité NP-complète [10]) :

Propriété 4.10 (petit modèle). *Soit φ une formule satisfaisable. Alors il existe un modèle \mathfrak{M} de taille polynomiale en la taille de φ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi$.*

Pour prouver ce résultat, nous partons d'un modèle fini de φ dont l'existence est donné par la propriété 4.9. Nous éliminons ensuite les mondes non nécessaires afin d'obtenir un modèle de taille polynomiale : nous ne gardons au plus qu'un monde pour chaque sous-formule modale de φ . Par exemple, pour une sous-formule $\diamond\psi$ de φ , nous gardons un monde maximal dans lequel ψ est vraie (cf BLACKBURN et al. [3], théorème 6.38 pour plus de détails).

Si ces petits modèles ne pouvaient pas toujours être représentés par des listes de mondes, rajouter la possibilité d'amas de mondes résout ce problème. Nous pouvons donc espérer

trouver des branches d'échec finies (et même de taille polynomiale) dans les tentatives de preuve de formules non prouvables (et donc non valides par complétude du calcul). Ainsi, voici une stratégie de preuve à profondeur polynomiale s'inspirant de la preuve de BLACKBURN et al. [3] pour la propriété 4.10 : à chaque fois qu'une règle $\vdash \boxminus$ (resp. $\vdash \boxplus$) est appliquée sur une formule $\boxminus\varphi$ (resp. $\boxplus\varphi$), nous essayons de deviner une position maximale (resp. minimale) où envoyer la formule φ . Nous devons donc annoter le séquent en question pour indiquer que la formule φ ne doit pas apparaître dans la droite d'un séquent à droite (resp. à gauche) d'un séquent annoté.

Définition 4.11 (hyperséquent annoté). *Soit $H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid H_2$ un hyperséquent. Le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ peut être annoté de la manière suivante : $H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \boxminus\varphi \mid H_2$. Cela indique que la formule φ ne peut apparaître à droite de ce séquent. De même, on peut indiquer que φ ne peut apparaître à gauche du séquent : $H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \boxplus\varphi \mid H_2$. Enfin, un séquent peut être annoté par plusieurs formules. Par exemple : $H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \boxminus\varphi, \boxplus\psi \mid H_2$.*

Nous rajoutons maintenant des versions modifiées des règles $\vdash \boxminus$ et $\vdash \boxplus$ des règles introduites précédemment, afin qu'elles puissent annoter les séquents où la formule φ est insérée. Par exemple :

$$\frac{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \vdash \varphi \mid \boxminus\varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2 \quad H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \Pi \vdash \Sigma, \boxminus\varphi \mid H_2}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \Pi \vdash \Sigma, \varphi \mid \boxminus\varphi \mid H_2 \quad H_1 \mid \{\Gamma \vdash \Delta, \boxminus\varphi\} \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2} \vdash \boxminus \mid _$$

$$\frac{}{H_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \boxminus\varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid H_2 \text{ non annoté par } \boxminus\varphi}$$

Cependant, notre stratégie impose des conditions pour savoir comment utiliser cette règle, car nous ne voulons pas qu'il y ait plusieurs séquents annotés par la même formule. Soit $\boxminus\varphi$ la formule sur laquelle nous souhaitons appliquer une règle. Alors, si aucun séquent n'est annoté par $\boxminus\varphi$, nous devons utiliser la version annotée de la règle. Mais si un séquent de l'hyperséquent est annoté par $\boxminus\varphi$, nous devons forcément envoyer φ dans la cellule annotée. Par exemple :

$$\frac{H \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \Pi \vdash \Sigma, \varphi \mid \boxminus\varphi \mid p \lesssim p'}{H \mid \Gamma \vdash \Delta, \boxminus\varphi \mid \Pi \vdash \Sigma \mid \boxminus\varphi \mid p \lesssim p'} \vdash \boxminus$$

Enfin, nous rajoutons des règles permettant de fermer les branches de la preuve ne respectant pas cette stratégie :

$$\frac{}{H \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \boxminus\varphi \mid \Pi \vdash \Sigma, \boxminus\varphi \mid p < p'} \text{ STOP-RIGHT}$$

$$\frac{}{H \mid \Pi \vdash \Sigma, \boxminus\varphi \mid \Gamma \vdash \Delta \mid \boxminus\varphi \mid p < p'} \text{ STOP-LEFT}$$

L'ajout de ces règles conserve la complétude de notre calcul : les formules auparavant prouvables le sont toujours. Cependant, la correction du calcul pourrait être mise en défaut : il se pourrait que les branches d'échec de la tentative de preuve d'une formule non valide soient désormais coupées par ces nouvelles règles, et la formule serait alors prouvable. Il faut ainsi prouver que si des branches d'échec existent mais sont coupées par cette stratégie, il existe une branche d'échec qui ne sera pas coupée (cette branche simule en fait le petit modèle donné par la propriété 4.10).

Définition 4.12. *Soit \mathfrak{M} un $K_t4.3$ -modèle avec amas, et soit H un hyperséquent constitué de n séquents s_1, \dots, s_n à des positions p_1, \dots, p_n (n est appelé la taille de H). Soit w_1, \dots, w_n des mondes distincts de \mathfrak{M} , on dit que $\mathfrak{M}, w_1, \dots, w_n$ respectent la structure de H ssi il*

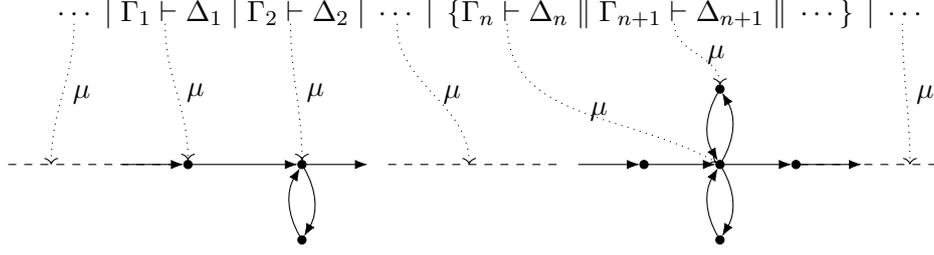


FIGURE 5. Injection d'un hyperséquent avec amas dans un $K_t4.3$ -modèle avec amas.

existe une fonction injective μ de l'ensemble des positions de H dans $\{w_1, \dots, w_n\}$ telle que :

- Pour toutes positions $p_i < p_j$ de H , $\mu(p_i) \mathcal{R} \mu(p_j)$.
- Pour toutes positions $s_i \sim s_j$ de H , $\mu(p_i) \mathcal{R} \mu(p_j)$ et $\mu(p_j) \mathcal{R} \mu(p_i)$. En particulier, pour toute position p_i appartenant à un amas de séquents, $\mu(p_i) \mathcal{R} \mu(p_i)$.

Dans ce cas, on note $H \xrightarrow{\mu} \mathfrak{M}, w_1, \dots, w_n$.

Dans la suite, nous noterons s_p le séquent d'un hyperséquent H présent à la position p .

Définition 4.13. Soit \mathfrak{M} un $K_t4.3$ -modèle avec amas, et soit H un hyperséquent de taille n . On dit que \mathfrak{M} est un modèle de H si pour tous mondes w_1, \dots, w_n de \mathfrak{M} et toute fonction μ tels que $H \xrightarrow{\mu} \mathfrak{M}, w_1, \dots, w_n$, il existe une position p telle que $\mathfrak{M}, \mu(p) \vDash s_p$. Dans ce cas, on note $\mathfrak{M} \vDash H$.

Inversement, on dit que \mathfrak{M} est un contre-modèle de H s'il existe des mondes w_1, \dots, w_n de \mathfrak{M} et une fonction μ tels que $H \xrightarrow{\mu} \mathfrak{M}, w_1, \dots, w_n$ et pour toute position p de H , $\mathfrak{M}, \mu(p) \not\vDash s_p$. Dans ce cas, on note $\mathfrak{M} \not\vDash H$, ou encore $\mathfrak{M}, \mu \not\vDash H$ si on veut préciser la fonction μ .

Théorème 4.14 (Correction de la stratégie). *La stratégie présentée ci-dessus est correcte.*

Démonstration. Par l'absurde, soit Φ une formule non valide telle que le séquent $\vdash \Phi$ soit prouvable par notre stratégie par une preuve \mathbb{P} . D'après la propriété 4.10, il existe un contre-modèle \mathfrak{M} de Φ de taille polynomiale en la taille de Φ . C'est donc un contre-modèle du séquent initial $\vdash \Phi$: il existe w_0 tel que $\mathfrak{M}, w_0 \not\vDash \vdash \Phi$. On pose donc $\mu(p_0) = w_0$, où p_0 désigne la position de $\vdash \Phi$. Nous allons enrichir cette fonction μ au fur et à mesure que notre hyperséquent va grossir, et à chaque application d'une règle $\vdash \boxplus$ ou $\vdash \boxminus$, nous allons suivre la branche de \mathbb{P} qui choisit d'annoter un séquent en accord avec le contre-modèle \mathfrak{M} et la fonction μ . Plus précisément, nous allons prouver le résultat suivant qui nous donne l'existence d'une telle branche :

Énoncé 4.14.1. *Si \mathfrak{M}, μ est un contre-modèle d'un hyperséquent conclusion d'une règle, alors il existe une prémisse de cette règle (et le cas échéant un enrichissement μ' de μ) dont l'hyperséquent admet \mathfrak{M}, μ' comme contre-modèle.*

Nous traitons d'abord le cas d'une règle qui ne crée pas de nouvelle cellule : montrons que dans ce cas nous pouvons choisir une branche telle que \mathfrak{M} soit toujours un contre-modèle de l'hyperséquent (avec le même μ). Prenons par exemple la règle $\boxplus \vdash$:

$$\frac{H [\Gamma \vdash \Delta] [\varphi, \Pi \vdash \Sigma]_{p \lesssim p'}}{H [\boxplus \varphi, \Gamma \vdash \Delta] [\Pi \vdash \Sigma]_{p \lesssim p'}} \boxplus \vdash$$

Par hypothèse, \mathfrak{M}, μ est un contre-modèle de l'hyperséquent conclusion, on a donc $\mathfrak{M}, \mu(p) \vDash \Box\varphi \wedge \Gamma \wedge \neg\Delta$ (où $\wedge \Gamma$ désigne la conjonction de toutes les formules de Γ , et $\wedge \neg\Delta$ la conjonction de la négation des formules de Δ) et $\mathfrak{M}, \mu(p') \vDash \wedge \Pi \wedge \neg\Sigma$. Or $p \lesssim p'$, donc $\mu(p) \mathcal{R} \mu(p')$, et on a bien $\mathfrak{M}, \mu(p') \vDash \varphi$. Ainsi, \mathfrak{M}, μ est bien un contre-modèle de la prémisse.

Considérons maintenant le cas de la règle $\vdash \Box$. Supposons que, jusqu'à présent, à chaque application d'une règle nous ayons été capable de choisir une branche dont l'hyperséquent admet bien \mathfrak{M}, μ comme contre-modèle. Supposons de plus que l'hyperséquent courant H possède une position p à laquelle se trouve un séquent $\Gamma \vdash \Delta, \Box\varphi$, et qu'aucune position de H ne soit encore annotée par $\Box\varphi$. La règle $\vdash \Box$ est alors appliquée, et nous voulons choisir quelle prémisse suivre pour que \mathfrak{M}, μ soit toujours un contre-modèle. Notons d'abord que $\mathfrak{M}, \mu(p) \not\vDash \Box\varphi$, c'est à dire que $\mathfrak{M}, \mu(p) \vDash \Diamond\neg\varphi$. Il existe donc au moins un monde w tel que $\mu(p) \mathcal{R} w$ et $\mathfrak{M}, w \vDash \neg\varphi$. Soit w' maximal pour cette propriété (un tel w' existe bien car \mathfrak{M} est fini). Alors :

- S'il existe une position p' de H telle que $w' = \mu(p')$, il faut choisir la prémisse qui va annoter p' . Comme $\mu(p) \mathcal{R} w'$, on a bien $p \lesssim p'$. Plus précisément, si $p \sim p'$, on choisi la prémisse qui envoie φ dans le séquent de l'amas, à la position p' (et qui annote cette position par $\Box\varphi$). Si p' est la position juste à droite de p , on choisi la prémisse qui envoie φ dans le séquent suivant (et l'annote par $\Box\varphi$). Si p' est plus loin sur la droite, on choisi la prémisse qui envoie $\Box\varphi$ dans le séquent suivant, et on réitère le processus. La formule $\Box\varphi$ va alors être envoyée sur la droite de proche en proche, jusqu'à ce qu'on puisse envoyer φ dans la bonne cellule (et annoter la position par $\Box\varphi$). De plus, pour tout monde $w'' \mathcal{R} w'$, on a $\mathfrak{M}, w'' \vDash \Diamond\neg\varphi$, donc à chaque étape intermédiaire de ce processus, \mathfrak{M}, μ reste bien un contre-modèle de l'hyperséquent courant. En effet, pour toute position p'' où l'on envoie $\Box\varphi$, on a bien $\mu(p'') \mathcal{R} \mu(p')$ (car $p'' \lesssim p'$), donc $\mathfrak{M}, \mu(p'') \not\vDash \Box\varphi$. Enfin, ayant bien choisi p' , on a bien $\mathfrak{M}, \mu(p') \not\vDash \varphi$.
- Sinon, il faut bien choisir la branche de \mathbb{P} pour créer une nouvelle cellule au bon endroit.
 - ▶ S'il existe une position p'' dans l'hyperséquent courant telle que $\mu(p'') \mathcal{R} w'$ et $w' \mathcal{R} \mu(p'')$, alors on envoie $\Box\varphi$ de proche en proche jusqu'à la position p'' (pour les mêmes raisons que précédemment, on a bien $p \lesssim p''$). Puis, si p'' n'est pas dans un amas, on choisi la prémisse qui crée un amas en p'' , et enfin on crée une nouvelle cellule $\vdash \varphi$ dans cet amas (annotée par $\Box\varphi$).
 - ▶ Sinon, soit p'' une position maximale dans l'hyperséquent courant telle que $\mu(p'') \mathcal{R} w'$ (p'' n'est peut être pas unique si elle est dans un amas, mais elle existe car $\mu(p) \mathcal{R} w'$). On a $p \lesssim p''$, donc on peut envoyer $\Box\varphi$ en p'' de proche en proche, puis créer une nouvelle cellule $\vdash \varphi$ à droite de p'' (annotée par $\Box\varphi$).

Dans les deux cas, appelons p' la position du nouveau séquent $\vdash \varphi$ que l'on vient de créer. En posant $\mu(p') = w'$, on vérifie facilement que \mathfrak{M}, μ est toujours un contre-modèle de l'hyperséquent courant.

Dans le cas où une cellule est déjà annotée par $\Box\varphi$, on remarque que la règle imposée par la stratégie conserve bien le fait que \mathfrak{M}, μ soit un contre-modèle de l'hyperséquent courant. Le cas de la règle $\vdash \Box$ se traite de manière analogue.

Ainsi, à chaque fois qu'une règle est appliquée dans \mathbb{P} , nous sommes capable de choisir une prémisse à suivre (en mettant éventuellement à jour μ) pour que \mathfrak{M}, μ soit un contre-modèle de l'hyperséquent de cette prémisse. De ce fait, cette branche de \mathbb{P} ne peut être fermée par une règle AX ou \perp car cela contredirait le fait qu'il existe un contre-modèle. De plus, on

remarquera que cette branche de \mathbb{P} n'est jamais fermée par une règle STOP propre à notre stratégie puisque w' a été choisi maximal. Cette branche de \mathbb{P} correspond donc à une branche de preuve "classique" sans annotations (les annotations n'ont servi qu'à nous guider dans le choix de la branche de \mathbb{P}). Or, \mathbb{P} est une preuve, donc toutes ses branches sont finies et terminent soit sur \perp , soit sur AX, soit sur STOP : contradiction. Ainsi, notre stratégie est correcte. \square

5. CONCLUSION

Pour conclure, nous avons obtenus un calcul des séquents correct et complet pour la logique **KL4.3**, une logique peu étudiée et qui ne possédait jusqu'alors pas de système de preuve. Cette logique s'avérera très utile par la suite, pour l'étude de divers fragments d'**XPath**.

Concernant la logique **K_t4.3**, notre stratégie nous donne en fait un algorithme PSPACE pour le problème de validité, car chaque branche possède au plus autant de cellules que le séquent de départ ne possède de sous-formules modales (l'arbre de preuve est donc de profondeur polynomiale). Or, ce problème est CO-NP-complet. Cette borne pourrait être atteinte avec une machine de Turing universelle qui explore toutes les branches de preuve respectant notre stratégie.

À partir de ce travail, plusieurs axes de recherche s'offrent à nous. Tout d'abord, nous pouvons ajouter l'axiome GL à la logique **K_t4.3** et adapter le calcul d'hyperséquents avec amas à cette logique. Ensuite, nous pouvons ajouter des données à notre logique afin de représenter un fragment d'**XPath** (les mondes des modèles possèdent alors une donnée, et les relations entre les mondes dépendent aussi des relations entre les données de ces mondes, cf [2, 8] pour un exemple d'une telle logique). Enfin, nous pouvons nous intéresser à une méthode d'élimination des coupures pour notre calcul d'hyperséquents avec amas.

Enfin, je tiens à remercier mes maîtres de stage, Sylvain SCHMITZ et David BAELE, pour leur accueil, leur encadrement exemplaire et leurs précieux conseils, ainsi que leurs nombreux retours sur mon rapport de stage.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Avron. On modal systems having arithmetical interpretations. *Journal of Symbolic Logic*, 49(3) : 935–942, 1984. doi:10.2307/2274147.
- [2] D. Baelde, S. Lunel, and S. Schmitz. A sequent calculus for a modal logic on finite data trees. In *CSL 2016, Leibniz International Proceedings in Informatics*. LZI, Sept. 2016. URL <https://hal.inria.fr/hal-01191172>. To appear.
- [3] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*, volume 53 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 2001.
- [4] K. Etessami, M. Y. Vardi, and T. Wilke. First-order logic with two variables and unary temporal logic. *Information and computation*, 179(2) :279–295, 2002.
- [5] J. Goubault-Larrecq and I. Mackie. *Proof theory and automated deduction*. Applied Logic Series. Springer Science & Business Media, 2001.
- [6] A. Indrzejczak. Eliminability of cut in hypersequent calculi for some modal logics of linear frames. *Information Processing Letters*, 115(2) :75–81, 2015.
- [7] A. Indrzejczak. Linear time in hypersequent framework. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 22(1) :121–144, 2016.
- [8] S. Lunel. Systèmes de preuves pour logiques modales à données. Mémoire de Master, LMFI, Université Paris-Diderot, Sept. 2015.
- [9] H. Ono and A. Nakamura. On the size of refutation Kripke models for some linear modal and tense logics. *Studia Logica*, 39(4) :325–333, 1980. doi:10.1007/BF00713542.
- [10] A. P. Sistla and E. M. Clarke. The complexity of propositional linear temporal logics. *J. ACM*, 32(3) : 733–749, jul 1985. doi:10.1145/3828.3837.