Neue, einfache Algorithmen für Petrinetze[1]

Alain Finkel · Jérôme Leroux

Einleitung

Zu den bekannten schwierigen theoretischen Problemen von Petrinetzen gehört die Entscheidbarkeit einer Reihe grundlegender Fragestellungen, darunter die Überdeckbarkeit, die Beschränktheit, die Platzbeschränktheit und die Erreichbarkeit. Die bislang publizierten Beweise der Entscheidbarkeit dieser Probleme sind lang und kompliziert. In diesem Beitrag präsentieren wir neue Algorithmen zur Entscheidung dieser vier Probleme, die *einfach* sind, alle *dem selben Prinzip* folgen und für weitere Probleme *verallgemeinerbar* sind.

Unsere Algorithmen sind auch für Studenten durchaus verständlich. Für das Beschränktheitsproblem vermeiden wir die nichttrivialen Baumkonstruktionen von Karp und Miller, und beschränken uns auf Invarianten. Unser Beweis des Erreichbarkeitsproblems ist um Größenordnungen einfacher als die Beweise von Mayr, Kosaraju, Lambert etc.

Strukturell geht es in jedem der vier Algorithmen darum, durch einfaches systematisches Durchprobieren Invarianten zu finden. Dieses einfache Prinzip vereinheitlicht die Beweise und erleichtert ihr Verständnis.

Schlussendlich hängen unsere Algorithmen nicht von allen Feinheiten der Petrinetze ab. Sie können vielmehr auf ähnliche Modelle verallgemeinert werden. Ein Beispiel dafür ist der Algorithmus für das Erreichbarkeitsproblem: Er kann leicht verallgemeinert werden auf *Lossy Channel Systems*, indem man Presburger-Invarianten durch andere entscheidbare Invarianten ersetzt (diese Idee hat Pachl 2003 für (perfekte) FIFO-Kanal-Systeme verwendet [15]).

Unsere Algorithmen sind nicht nur einfach; ihre Komplexität ist quasi-optimal für alle Probleme mit Ausnahme der Erreichbarkeit. (Die Komplexität dieses Problems ist unbekannt.)

In diesem Beitrag schildern wir die Struktur der Beweise und verweisen für technische Einzelheiten auf die Literatur.

Petrinetze

Notationen

Mit $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ bezeichnen wir die ganzen, die natürlichen, die rationalen bzw. die nichtnegativen rationalen Zahlen. Vektoren und Mengen von Vektoren werden **fett** geschrieben.

Die übliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$ schreiben wir als $\leq$ und erweitern sie komponentenweise auf $\mathbb{Z}^d$: $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ gdw für jedes $1 \leq i \leq d$ gilt: $x_i \leq y_i$. Für einen Vektor $\mathbf{v}$ sei $\|\mathbf{v}\|^+$ und $\|\mathbf{v}\|^-$ die Menge der Indizes i mit $\mathbf{v}(i) > 0$ bzw. $\mathbf{v}(i) < 0$.

Petrinetze

Ein Petrinetz (kurz: Netz) schreiben wir als Tripel $N = \langle P, T, F \rangle$. Dabei sind P und T disjunkte Mengen

[1] Dieser Beitrag wurde von der Agence Nationale de la Recherche REACHARD und von Chaire DIGITEO unterstützt.

DOI 10.1007/s00287-013-0753-5

Alain Finkel
LSV, ENS Cachan, CNRS & INRIA,
Cachan, France
E-Mail: alain.finkel@lsv.ens-cachan.fr

Jérôme Leroux
LaBRI, Université de Bordeaux, CNRS,
Bordeaux, France

Zusammenfassung

Wir zeigen, wie die Entscheidungsprobleme der Überdeckung, der Beschränktheit und der Erreichbarkeit mithilfe induktiver Invarianten einfacher lösbar sind als mit herkömmlichen Methoden.

(„Plätze" bzw. „Transitionen"). $F : (P \times T) \cup (T \times P) \to \mathbb{N}$ ist die *Flussfunktion*. Im Weiteren setzen wir P als Menge mit d Elementen voraus, deren Elemente über ihre Indizes $1, \ldots, d$ geordnet sind. Eine *Markierung* $\mathbf{m}$ ist ein Vektor in $\mathbb{N}^d$. Intuitiv beschreibt $\mathbf{m}(i)$ die Zahl der Marken auf dem i-ten Platz. Wir verwenden die übliche grafische Darstellung für Petrinetze: Kreise und Quadrate für Plätze und Transitionen, und für $F(a, b) = n > 0$ einen mit „n" beschrifteten Pfeil. Für $n = 1$ entfällt die Inschrift. Abbildung 1 zeigt ein Beispiel.

Die operationelle Semantik eines Petrinetzes ist wie übliche eine Relation über Markierungen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$, beschriftet mit Transitionen t, so dass $\mathbf{x} \xrightarrow{t} \mathbf{y}$ gdw für alle Plätze $p \in P$ gilt: $\mathbf{x}(p) \geq F(p, t)$ und $\mathbf{y}(p) = \mathbf{x}(p) - F(p, t) + F(t, p)$.

Für Worte $w = t_1, \ldots, t_k$ aus Transitionen $t_j \in T$ ist die binäre Relation $\xrightarrow{w}$ über den Markierungen definiert als $\mathbf{x} \xrightarrow{w} \mathbf{y}$ gdw es gibt eine Sequenz $\mathbf{m}_0, \ldots, \mathbf{m}_n$ von Markierungen so dass $\mathbf{m}_0 = \mathbf{x}$, $\mathbf{m}_n = \mathbf{y}$, und

$$\mathbf{m}_0 \xrightarrow{t_1} \mathbf{m}_1 \ldots \xrightarrow{t_n} \mathbf{m}_n .$$

Für eine Sprache $W \subseteq T^*$ sei $\xrightarrow{W} = \bigcup_{w \in W} \xrightarrow{w}$. Die Relation $\xrightarrow{T^*}$ heißt *Erreichbarkeit*, geschrieben $\xrightarrow{*}$. $\xrightarrow{T}$ ist die *Ein-Schritt-Relation*, kurz $\rightarrow$. Offensichtlich ist $\xrightarrow{*}$ die reflexive und transitive Hülle von $\rightarrow$. Für eine Menge $\mathbf{M} \subseteq \mathbb{N}^d$ von Markierungen führen wir folgende Mengen ein:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Post}(\mathbf{M}) &= \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}} \{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{y}\} \\
\mathrm{Pre}(\mathbf{M}) &= \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}} \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{m}\} \\
\mathrm{Post}^*(\mathbf{M}) &= \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}} \{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{m} \xrightarrow{*} \mathbf{y}\}
\end{aligned}$$

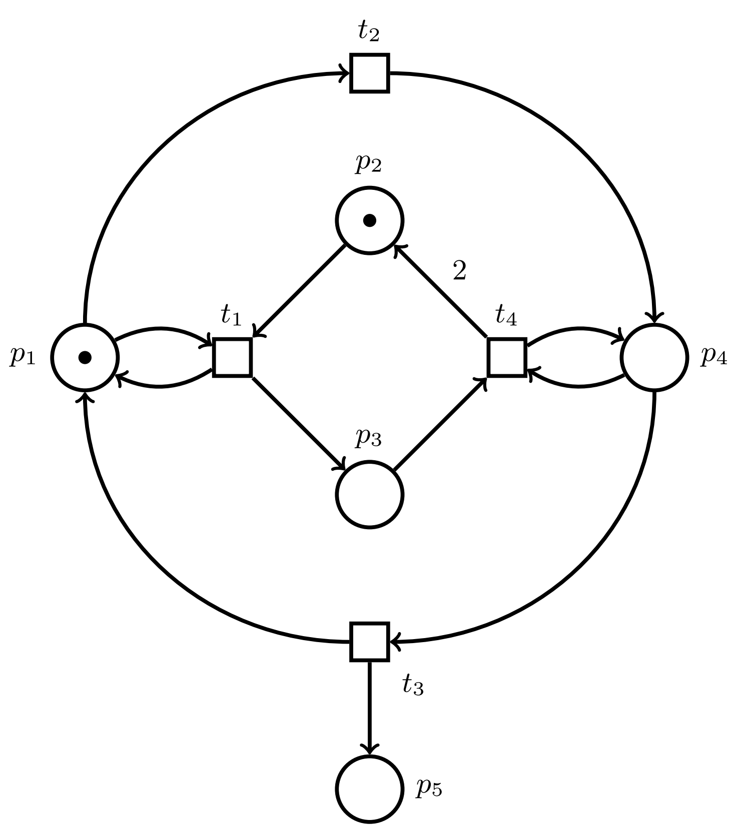

Abb. 1 Das Hopcroft und Pansiot-Netz

$$\mathrm{Pre}^*(\mathbf{M}) = \bigcup_{\mathbf{m}\in\mathbf{M}} \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{x} \xrightarrow{*} \mathbf{m}\}\,.$$

In diesem Beitrag beschreiben wir einfache Algorithmen zur Lösung folgender klassischer Probleme:

Erreichbarkeit Eingabe: $(N, \mathbf{m}_0, \mathbf{m})$
Frage: Gilt $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{*} \mathbf{m}$?

Überdeckung Eingabe: $(N, \mathbf{m}_0, \mathbf{m})$
Frage: Gibt es ein $\mathbf{y}$ mit $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{*} \mathbf{y}$ und $\mathbf{y} \geq \mathbf{m}$?

Beschränktheit Eingabe: $(N, \mathbf{m}_0)$
Frage: Ist $\mathrm{Post}^*(\mathbf{m}_0)$ endlich ?

Platzbeschränktheit Eingabe: $(N, \mathbf{m}_0, p)$
Frage: Ist $\{\mathbf{m}(p) \mid \mathbf{m} \in \mathrm{Post}^*(\mathbf{m}_0)\}$ endlich ?

Beispiel 1. Das Petrinetz aus Abb. 1 wurde in [11] als Beispiel eines Petrinetzes angegeben, dessen Menge erreichbarer Markierungen nicht als Pressburger-Formel darstellbar ist. In der Tat ist $\mathrm{Post}^*(\{\mathbf{m}_0\})$ für $\mathbf{m}_0 = (1, 1, 0, 0, 0)$

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{N}^5 \;\middle|\; \begin{array}{c} (\,x_1 = 1 \wedge x_4 = 0 \wedge \\ 1 \leq x_2 + x_3 \leq 2^{x_5}\,) \vee \\ (\,x_1 = 0 \wedge x_4 = 1 \wedge \\ 1 \leq x_2 + 2x_3 \leq 2^{x_5+1}\,) \end{array} \right\}.$$

Aufwärts und abwärts geschlossene Mengen

Eine Menge $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{N}^d$ ist *aufwärts geschlossen* wenn für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ und $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ gilt: $\mathbf{u} \leq \mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{m} \in \mathbf{U}$. Der *Aufwärts-Abschluss* eines Vektors $\mathbf{u} \subseteq \mathbb{N}^d$ ist die Menge $\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{u} \leq \mathbf{m}\}$ und wird geschrieben als $\uparrow\!\mathbf{u}$. Für eine Menge $\mathbf{M} \subseteq \mathbb{N}^d$ ist die Menge $\bigcup_{\mathbf{m}\in\mathbf{M}} \uparrow\!\mathbf{m}$ der Aufwärts-Abschluss von $\mathbf{M}$, geschrieben $\uparrow\!\mathbf{M}$. Offenbar ist $\uparrow\!\mathbf{M}$ die kleinste aufwärts geschlossene Teilmenge von $\mathbb{N}^d$, die $\mathbf{M}$ als Teilmenge enthält. Da $\mathbb{N}^d$ mit $\leq$ wohlgeordnet ist, gibt es für jede aufwärts geschlossene Menge $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{N}^d$ eine endliche Menge $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{U}$ sodass $\mathbf{U} = \;\uparrow\!\mathbf{F}$. Somit ist jede aufwärts geschlossene Menge symbolisch als eine endliche Menge $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d$ repräsentierbar. Eine solche Menge $\mathbf{F}$ heißt *Aufwärts-Basis* von $\mathbf{U}$. Man sieht leicht, dass die kleinsten Elemente von $\mathbf{F}$ bereits selbst eine Aufwärts-Basis bilden, die *minimale Aufwärts-Basis* von U.

Beispiel 2. In $\mathbb{N}^2$ ist $\{(x, y) \mid x \geq 3 \vee y \geq 1\}$ aufwärts geschlossen. Eine nichtminimale Basis ist $\{(3, 0), (3, 1), (0, 1)\}$. Die minimale Basis ist $\{(3, 0), (0, 1)\}$.

Symmetrisch zu aufwärts geschlossenen Mengen ist $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{N}^d$ *abwärts geschlossen*, wenn für alle $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ und alle $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ gilt: $\mathbf{m} \leq \mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{m} \in \mathbf{D}$. Der Abwärts-Abschluss eines Vektors $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^d$ ist die Menge $\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{m} \leq \mathbf{d}\}$, geschrieben $\downarrow\!\mathbf{d}$. Für eine Menge $\mathbf{M} \subseteq \mathbb{N}^d$ ist die Menge $\bigcup_{\mathbf{m}\in\mathbf{M}} \downarrow\!\mathbf{m}$ der *Abwärts-Abschluss* von M, geschrieben $\downarrow\!\mathbf{M}$, Offenbar ist $\downarrow\!\mathbf{M}$ die kleinste abwärts geschlossene Teilmenge von $\mathbb{N}^d$, die M enthält. Für eine endliche Menge $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d$ ist $\downarrow\!\mathbf{F}$ offensichtlich endlich. Aber eine unendliche abwärts geschlossene Teilmenge von $\mathbb{N}^d$, beispielsweise $\mathbb{N}^d$ selbst, kann nicht mit einer endlichen Teilmenge $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d$ repräsentiert werden.

Dieses Problem lösen wir folgendermaßen: Jede geordnete Menge kann (unter passenden Annahmen) topologisch so ergänzt werden, dass abwärts geschlossene Mengen endlich charakterisiert werden können [9, 10]. Für $\mathbb{N}^d$ wählen wir $\mathbb{N}^d_\omega$, mit $\mathbb{N}_\omega = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Die Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}^d$ erweitern wir durch $n \leq \omega$ für alle $n \in \mathbb{N}_\omega$. Für $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d_\omega$ sei nun $\downarrow\!\mathbf{x}$ die Menge $\{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^d_\omega \mid \mathbf{d} \leq \mathbf{x}\}$. Für eine Menge $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{N}^d_\omega$ sei $\downarrow\!\mathbf{X} = \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \downarrow\!\mathbf{x}$. Nach den Resultaten von [9, 10] ist jede abwärts geschlossene Menge $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{N}^d$ der Durchschnitt $\mathbf{D} = \mathbb{N}^d \cap \downarrow\!\mathbf{F}$, für eine endliche Menge $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d_\omega$. Dann heißt F eine *Abwärts-Basis* von $\mathbf{D}$. Die maximalen Elemente von F formen selbst schon eine Abwärts-Basis von D. Sie ist die *minimale Abwärts-Basis* der abwärts geschlossenen Menge D.

Beispiel 3. Abbildung 2 skizziert die in $\mathbb{N}^2$ abwärts geschlossene Menge $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq 3 \vee y \leq 1\} \cup \{(4, 2), (4, 3), (5, 2)\}$. Die fett gezeichneten Punkte $(\{0, 1, 2, 3\} \times \{\omega\}) \cup \{(4, 3), (5, 2)\} \cup (\{\omega\} \times \{0, 1\})$ bilden eine Basis; ihre minimalen Elemente sind umkreist.

Für das Weitere wird die operationale Semantik von Petrinetzen in $\mathbb{N}^d_\omega$ erweitert. Technisch sei $\mathbf{x} \xrightarrow{t} \mathbf{y}$ für erweiterte Markierungen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d_\omega$ gdw $\mathbf{x}(p) \geq F(p, t)$ und $\mathbf{y}(p) = \mathbf{x}(p) + (F(t, p) - F(p, t))$ für alle $p \in P$, mit der Addition $\omega + z = \omega$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Die Relationen $\xrightarrow{w}$ für $w \in T^*$, sowie $\xrightarrow{*}$ und $\rightarrow$, und die Mengen $\mathrm{Post}(\mathbf{M})$, $\mathrm{Pre}(\mathbf{M})$, $\mathrm{Post}^*(\mathbf{M})$, und $\mathrm{Pre}^*(\mathbf{M})$ sind entsprechend definiert.

Die *Überdeckungsmenge* von N und $\mathbf{m}_0$ ist der Abwärts-Abschluss der Erreichbarkeitsmenge:

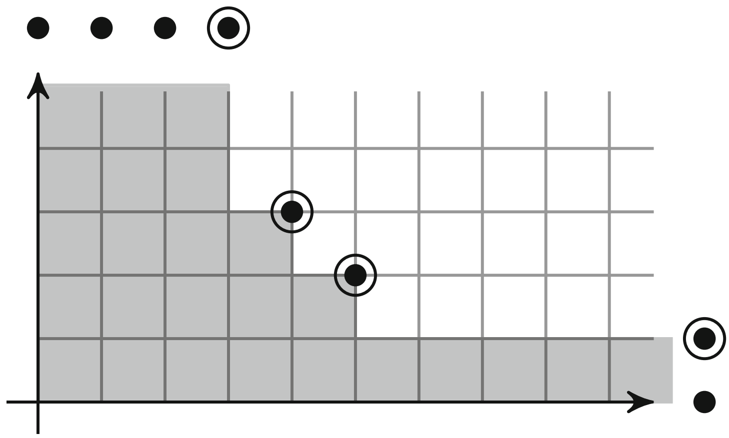

Abb. 2 Eine abwärts geschlossene Menge

$\text{Cover}(\mathbf{m}_0) = \downarrow\text{Post}^*(\mathbf{m}_0)$. Damit gibt es eine endliche Basis $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d_\omega$ so dass $\text{Cover}(\mathbf{m}_0) = \mathbb{N}^d \cap \downarrow\mathbf{F}$. Wenn man nun für ein Petrinetz N mit der Anfangsmarkierung $\mathbf{m}_0$ eine endliche Basis der Überdeckungsmenge berechnet, kann man Überdeckbarkeit, Beschränktheit, und Platzbeschränktheit (sowie andere Fragen, beispielsweise die Regularität der Trace-Sprace) unmittelbar entscheiden.

Beispiel 4. Im Netz N aus Abb. 1 gilt: $\text{Cover}(\mathbf{m}_0) = \mathbb{N}^5 \cap \downarrow\mathbf{F}$ mit der minimalen Basis $\mathbf{F} = \{(1, \omega, \omega, 0, \omega), (0, \omega, \omega, 1, \omega)\}$.

Überdeckbarkeit

Wie üblich zeigen wir die Entscheidbarkeit der Überdeckbarkeit durch den Nachweis, dass Überdeckbarkeit und Nichtüberdeckbarkeit beide semi-entscheidbar (rekursiv aufzählbar) sind.

Überdeckbarkeit ist semi-entscheidbar

Überdeckbarkeit ist nicht nur für Petrinetze semi-entscheidbar, sondern für viele ähnliche Maschinenmodelle (beispielsweise Minsky-Maschinen oder oder Turing-Maschinen) mit endlich vielen Transitionen und einer effektiv berechenbaren Ein-Schritt-Relation:

Semi-algorithm coverability$(N, \mathbf{x}_0, \mathbf{x})$

1. Enumerate all the words $w \in T^*$ and **check:**
2. **if** $\mathbf{x}_0 \xrightarrow{w} \mathbf{y}$ and $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$
3. **return** „**x** is coverable"

Im Fall der Nichtüberdeckbarkeit terminiert dieser Algorithmus nicht. Deshalb suchen wir für diesen Fall nach einem „Zeugen", der für eine Markierung **m** beweist, dass **m** nicht überdeckbar ist.

Nichtüberdeckbarkeit ist semi-entscheidbar

Der Beweis basiert auf folgender Äquivalenz:

Für jedes **y** mit $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{*} \mathbf{y}$ gilt $\mathbf{y} \not\geq \mathbf{m} \iff$

Es gibt eine endliche Menge $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d$ mit $\mathbf{m}_0 \notin \uparrow\mathbf{F}$, $\mathbf{m} \in \uparrow\mathbf{F}$ und $\text{Pre}(\uparrow\mathbf{F}) \subseteq \uparrow\mathbf{F}$.

$(\Leftarrow)$: Sei also $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d$, $\mathbf{m}_0 \notin \uparrow\mathbf{F}$, $\mathbf{m} \in \uparrow\mathbf{F}$, und $\text{Pre}(\uparrow\mathbf{F}) \subseteq \uparrow\mathbf{F}$. Durch Induktion folgt $\text{Pre}^*(\uparrow\mathbf{m}) \subseteq \uparrow\mathbf{F}$. Da $\mathbf{m}_0 \notin \uparrow\mathbf{F}$, folgt $\mathbf{m}_0 \notin \text{Pre}^*(\uparrow\mathbf{m})$. Für jedes **y** mit $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{*} \mathbf{y}$, gilt deshalb $\mathbf{y} \not\geq \mathbf{m}$.

$(\Rightarrow)$: In diesem Fall gilt $\mathbf{m}_0 \notin \text{Pre}^*(\uparrow\mathbf{m})$. Für alle wohlgeordneten Transitionssysteme, und damit auch für Petrinetze, ist diese Menge aufwärts geschlossen. Sie hat also eine endliche Basis $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d$ mit $\text{Pre}^*(\uparrow\mathbf{m}) = \uparrow\mathbf{F}$. Nun gilt per Konstruktion: $\mathbf{m}_0 \notin \uparrow\mathbf{F}$ und $\text{Pre}(\uparrow\mathbf{F}) \subseteq \uparrow\mathbf{F}$.

Nun geht es darum, den Test $\text{Pre}(\uparrow\mathbf{F}) \subseteq \uparrow\mathbf{F}$ zu implementieren. Zunächst beobachten wir, dass $\text{Pre}(\uparrow\mathbf{m})$ für jedes $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ aufwärts geschlossen ist. Um eine endliche Basis von $\text{Pre}(\uparrow\mathbf{m})$ berechnen zu können, brauchen wir die Gleichung

$$\text{Pre}(\uparrow\mathbf{m}) = \bigcup_{t \in T} \uparrow\mathbf{m}_t$$

wobei $\mathbf{m}_t$ die kleinste Markierung mit $\mathbf{m}_t \xrightarrow{t} \mathbf{m}'_t$ ist, für eine Markierung $\mathbf{m}'_t \geq \mathbf{m}$. Für die Markierung $\mathbf{m}_t$ und jeden Platz $p \in P$ gilt:

$$\mathbf{m}_t(p) = \max\{F(p,t), \mathbf{m}(p) + F(p,t) - F(t,p)\} .$$

Damit ist $\text{pb}(\mathbf{m}) = \{\mathbf{m}_t \mid t \in T\}$ eine endliche Basis von $\text{Pre}(\uparrow\mathbf{m})$. Sie ist aber nicht notwendigerweise minimal! Für eine endliche Menge $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d$ sei $\text{pb}(\mathbf{F})$ die Menge $\bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbf{F}} \text{pb}(\mathbf{m})$. Damit erhalten wir folgenden Algorithmus:

Semi-algorithm non-coverability-1$(N, \mathbf{m}_0, \mathbf{m})$

1. Enumerate all the finite subsets $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d$ and **check:**
2. **if** $\mathbf{m}_0 \notin \uparrow\mathbf{F}$ and $\mathbf{m} \in \uparrow\mathbf{F}$ and $\mathrm{pb}(\mathbf{F}) \subseteq \uparrow\mathbf{F}$
3. **return** „**m** is not coverable"

Zeile 1 kann implementiert werden durch Betrachten der Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}^d$ für $n = 1, 2, \ldots$ Die drei Tests in Zeile 2 sind entscheidbar. Beispielsweise ist $\mathbf{m} \in \uparrow\mathbf{F}$ äquivalent zu $\exists \mathbf{f} \in \mathbf{F},\ \mathbf{m} \geq \mathbf{f}$. Das ist entscheidbar, weil **F** endlich ist. Die Bedingung $\mathrm{pb}(\mathbf{F}) \subseteq \uparrow\mathbf{F}$ ist äquivalent zu $\forall \mathbf{x} \in \mathrm{pb}(\mathbf{F}),\ \exists \mathbf{f} \in \mathbf{F},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{f}$. Mit der Ausführung von Zeile 3 folgt die Korrektheit der Semi-Entscheidung aus der Äquivalenz am Anfang dieses Beweises.

Ein Algorithmus zur Entscheidung der Überdeckbarkeit

Wir betonen noch einmal, dass „**m** ist überdeckbar von $\mathbf{m}_0$ aus" äquivalent ist zu „$\mathbf{m}_0 \in \mathrm{Pre}^*(\uparrow\mathbf{m})$". Folgender Algorithmus berechnet eine endliche Basis der aufwärts geschlossenen Menge $\mathrm{Pre}^*(\uparrow\mathbf{m})$:

Algorithm Coverability$(N, \mathbf{m}_0, \mathbf{m})$

1. Let $\mathbf{F} := \{\mathbf{m}\}$;
2. **while** $\mathrm{pb}(\mathbf{F}) \nsubseteq \uparrow\mathbf{F}$
3. $\mathbf{F} := \mathbf{F} \cup \mathrm{pb}(\mathbf{F})$;
4. **If** $\mathbf{m}_0 \in \uparrow\mathbf{F}$ **then return** „**m** is coverable"
else return „**m** is not coverable"

Terminierung und Korrektheit dieses Algorithmus sieht man schnell: Sei $\mathbf{F}_n$ der Wert von **F** in Zeile 2 beim n-ten Durchlauf der While-Schleife. Per Induktion sieht man sofort:

$$\uparrow\mathbf{F}_n = \bigcup_{\mathbf{y} \in \uparrow\mathbf{m}} \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \mid \exists w \in T^*,\ \mathbf{x} \xrightarrow{w} \mathbf{y} \ \wedge\ |w| \leq n\}$$

Wenn die Bedingung „$\mathrm{pb}(\mathbf{F}_n) \subseteq \uparrow\mathbf{F}_n$" der While-Schleife gilt, gilt also auch $\uparrow\mathbf{F}_n = \mathrm{Pre}^*(\uparrow\mathbf{m})$. Falls der Algorithmus also terminiert, ist das Resultat korrekt.

Der Beweis der Terminierung basiert auf einer endlichen Basis **G** von $\mathrm{Pre}^*(\uparrow\mathbf{m})$. Da **G** für ein hinreichend großes n eine Teilmenge von $\uparrow\mathbf{F}_n$ ist, gibt es also ein n_0 mit $\mathbf{G} \subseteq \uparrow\mathbf{F}_{n_0}$. Daraus folgt $\uparrow\mathbf{F}_{n_0} = \mathrm{Pre}^*(\uparrow\mathbf{m})$. Insbesondere gilt $\mathrm{pb}(\mathbf{F}_{n_0}) \subseteq \uparrow\mathbf{F}_{n_0}$, und somit terminiert der Algorithmus.

Beschränktheit und Platzbeschränktheit

Ein Algorithmus zur Entscheidung von Beschränktheit

Semi-Entscheidbarkeit für Beschränktheit ist offensichtlich: Wenn von $\mathbf{m}_0$ aus nur endlich viele Markierungen erreichbar sind, terminiert folgender Algorithmus:

Semi-algorithm boundedness$(N, \mathbf{m}_0)$

1. $\mathbf{F} \leftarrow \{\mathbf{m}_0\}$
2. **while** $\mathrm{Post}(\mathbf{F}) \nsubseteq \mathbf{F}$ **do**
3. $\mathbf{F} \leftarrow \mathbf{F} \cup \mathrm{Post}(\mathbf{F})$
4. **return** "bounded"

Der Algorithmus zur Semi-Entscheidbarkeit der Unbeschränktheit basiert auf der Beobachtung, dass der Erreichbarkeitsbaum eines Netzes endlich verzweigt. Der Baum eines von $\mathbf{m}_0$ aus unbeschränkten Petrinetzes hat deshalb mindestens einen Pfad der Form $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{w} \mathbf{x} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{y}$ mit $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ und $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Auf dieser Eigenschaft beruht folgender Algorithmus, der alle Worte $w, \sigma \in T^*$ durchprobiert:

Semi-algorithm non-boundedness$(N, \mathbf{m}_0)$

1. Enumerate all the pair of words (w, σ) and **check:**
2. **if** one have: $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{w} \mathbf{x} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{y}$ with $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ and $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$
3. **return** "unbounded"

Ein Algorithmus zur Entscheidung der Platzbeschränktheit

Der Algorithmus zur Semi-Entscheidung der Beschränktheit eines Platzes p beruht auf folgender Äquivalenz

$$p \text{ ist beschränkt}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\text{Es gibt eine endliche Menge } \mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}_\omega^d \text{ so dass}$$
$$\mathbf{m}_0 \in \downarrow\mathbf{F},\ \mathrm{Post}(\mathbf{F}) \subseteq \downarrow\mathbf{F} \text{ und } \mathbf{m}(p) \neq \omega \text{ für alle } \mathbf{m} \in \mathbf{F}.$$

$(\Rightarrow)$: Sei $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}_\omega^d$ eine endliche Basis der Überdeckungsmenge von $\mathbf{m}_0$. Da p beschränkt ist, gilt $\mathbf{m}(p) \in \mathbb{N}$ für alle $\mathbf{m} \in \mathbf{F}$. Nach Definition gilt $\mathbf{m}_0 \in \downarrow\mathbf{F}$ und $\mathrm{Post}(\mathbf{F}) \subseteq \downarrow\mathbf{F}$.

$(\Leftarrow)$: Sei $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}_\omega^d$ mit $\mathbf{m}_0 \in \downarrow\mathbf{F}$, $\mathrm{Post}(\mathbf{F}) \subseteq \downarrow\mathbf{F}$ und $\mathbf{m}(p) \in \mathbb{N}$ für alle $\mathbf{m} \in \mathbf{F}$. Da $\mathrm{Post}^*(\mathbf{m}_0) \subseteq \mathbb{N}^d \cap \downarrow\mathbf{F}$, folgt die Beschränktheit von p. Somit ist die Platzbeschränktheit mit folgendem Algorithmus semi-entscheidbar:

Semi-algorithm place boundedness$(N, \mathbf{m}_0, p)$
1. Enumerate all the finite subsets $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}^d_\omega$ and **check:**
2. **If** $\mathbf{m}_0 \in \downarrow\mathbf{F}$ and $\mathrm{Post}(\mathbf{F}) \subseteq \downarrow\mathbf{F}$ and $\mathbf{m}(p) \neq \omega$ for every $\mathbf{m} \in \mathbf{F}$
3. **return** "place p is bounded"

Der Beweis der Semi-Entscheidbarkeit der Nichtplatzbeschränktheit [5] basiert auf Higmanns Lemma. Danach ist ein Platz p eines Netzes mit d Plätzen genau dann von $\mathbf{m}_0$ aus unbeschränkt, wenn es $w_1, \sigma_1, \ldots, w_d, \sigma_d \in T^*$ und einen Ablauf

$$\mathbf{m}_0 \xrightarrow{w_1} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{\sigma_1} \mathbf{y}_1 \cdots \xrightarrow{w_d} \mathbf{x}_d \xrightarrow{\sigma_d} \mathbf{y}_d$$

gibt, für den gilt:
(1) $\mathbf{y}_1 + \cdots + \mathbf{y}_j \geq \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_j$ für alle $1 \leq j \leq d$, und
(2) $\mathbf{y}_1(p) + \cdots + \mathbf{y}_d(p) > \mathbf{x}_1(p) + \cdots + \mathbf{x}_d(p)$.

Damit hat der folgende Algorithmus die gewünschten Eigenschaften:

Semi-algorithm place non-boundedness$(N, \mathbf{m}_0, p)$
1. Enumerate all the finite sequences of $2d$ words $(w_1, \sigma_1, \ldots, w_d, \sigma_d)$ and **check:**
2. **if** $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{w_1} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{\sigma_1} \mathbf{y}_1 \cdots \xrightarrow{w_d} \mathbf{x}_d \xrightarrow{\sigma_d} \mathbf{y}_d$ and
3. $\mathbf{y}_1 + \cdots + \mathbf{y}_j \geq \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_j$ for every $1 \leq j \leq d$ and
4. $\mathbf{y}_1(p) + \cdots + \mathbf{y}_d(p) > \mathbf{x}_1(p) + \cdots + \mathbf{x}_d(p)$
5. **return** "place p is unbounded"

Ein gemeinsamer Algorithmus für alle drei Probleme

Die Algorithmen für die drei geschilderten Probleme beruhen letztlich alle auf den selben Konzepten. Das gilt auch für weitere Probleme, beispielsweise die genaue Grenze im Fall der Platzbeschränktheit. Der folgende Algorithmus berechnet eine endliche Basis der Überdeckungsmenge von $\mathbf{m}_0$:

Procedure clover$(N, \mathbf{m}_0)$
1. $\mathbf{F} \leftarrow \{\mathbf{m}_0\}$
2. **while** $\mathrm{Post}(\mathbf{F}) \not\subseteq \downarrow\mathbf{F}$ **do**
(a) Choose fairly (see below) $(w, \mathbf{m}) \in T^* \times \mathbf{F}$ such that $\mathbf{m} \xrightarrow{w} \mathbf{y}$ with $\mathbf{m} \leq \mathbf{y}$
(b) $\mathbf{F} \leftarrow \mathbf{F} \cup \{\mathbf{m} + \omega(\mathbf{y} - \mathbf{m})\}$
3. **return F**

Hier bezeichnet $\mathbf{m} + \omega(\mathbf{y} - \mathbf{m})$ den Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^d_\omega$ mit $\mathbf{v}(i) = \mathbf{m}(i)$ falls $\mathbf{y}(i) = \mathbf{m}(i)$ und $\mathbf{v}(i) = \omega$ falls $\mathbf{y}(i) > \mathbf{m}(i)$.

Die Fairness-Bedingung in Zeile 2(a) wird folgendermaßen implementiert: $\mathbf{F}_n$ sei die Menge $\mathbf{F}$ beim n-ten Durchlauf der *While*-Schleife. Zudem sei $\mathbf{M} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{F}_n$. Die Fairness-Bedingung verlangt nun, dass jedes Paar $(w, \mathbf{m}) \in T^* \times \mathbf{M}$ mindestens einmal in Zeile 2 gewählt wird.

Wenn der Algorithmus terminiert, ist $\mathbb{N}^d \cap \downarrow\mathbf{F}$ die Überdeckungsmenge. Königs und Dicksons Lemmata garantieren, *dass* der Algorithmus terminiert.

Man kann auch die eindeutige Menge aller maximalen Elemente der Überdeckungswege berechnen (in [7] als minimal coverability set, in [10] als *clover* bezeichnet).

Erreichbarkeit

Erreichbarkeit ist semi-entscheidbar

Das Erreichbarkeitsproblem ist mit folgendem Algorithmus semi-entscheidbar:

Semi-algorithm reachability$(N, \mathbf{m}_0, \mathbf{m})$
1. Enumerate all the words $w \in T^*$ and **check:**
2. **if** $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{w} \mathbf{m}$
3. **return** „**m** is reachable"

Nichterreichbarkeit ist semi-entscheidbar

Um zu beweisen, dass Nichterreichbarkeit semi-entscheidbar ist, suchen wir für jede nicht erreichbare Markierungen einen *Zeugen*. Als Zeugen verwenden wir die Formeln der *Presburger-Arithmetik*. Das ist die Logik für die Struktur der natürlichen Zahlen mit den Konstanten 0 und 1, und der Addition als einziger Operation. Mit solchen Formeln kann man Mengen **M** von Markierungen charakterisieren. Die Semi-Entscheidbarkeit der Nichterreichbarkeit basiert nun auf folgendem Theorem:

Theorem 5 ([13]). *Sei* $\mathbf{m}$ *eine Markierung, die von* $\mathbf{m}_0$ *aus nicht erreichbar ist. Dann gibt es eine Menge* $\mathbf{M} \subseteq \mathbb{N}^d$ *von Markierungen, die als Presburger-Formel darstellbar ist, und für die gilt:* $\mathrm{Post}(\mathbf{M}) \subseteq \mathbf{M}$, $\mathbf{m}_0 \in \mathbf{M}$, *und* $\mathbf{m} \notin \mathbf{M}$.

Damit terminiert folgender Algorithmus genau dann, wen **m** nicht erreichbar ist. Die Bedingungen aus Zeile 2 sind als – entscheidbares – Erfüllbarkeitsproblem der Presburger-Arithmetik realisierbar:

Semi-algorithm non-reachability$(N, \mathbf{m}_0, \mathbf{m})$
1. Enumerate all the Presburger formulas denoting Presburger sets $\mathbf{M} \subseteq \mathbb{N}^d$

Tabelle 1

Die Komplexität wichtiger Petrinetz-Eigenschaften

Abschnitt	Algorithmus	Kleinste Größe für gewisse Beispiele
Überdeckbarkeit ist semi-entscheidbar	Coverability	2-EXP [4, 16]
Nichtüberdeckbarkeit ist semi-entscheidbar	Non-coverability-1&2	2-EXP [3, 4]
Ein Algorithmus zur Entscheidung der Überdeckbarkeit	Coverability	2-EXP [3, 4]
Ein Algorithmus zur Entscheidung von Beschränktheit	Boundedness	Ackermann [6, 14]
Ein Algorithmus zur Entscheidung von Beschränktheit	Non-boundedness	2-EXP [4, 16]
Ein Algorithmus zur Entscheidung der Platzbeschränktheit	Place boundedness	Ackermann [6, 14]
Ein Algorithmus zur Entscheidung der Platz-Unbeschränktheit	Place non-boundedness	2-EXP [3, 16]
Ein gemeinsamer Algorithmus für alle drei Probleme	Clover	Ackermann [6, 14]

2. **if** $\mathrm{Post}(\mathbf{M}) \subseteq \mathbf{M}$, $\mathbf{m}_0 \in \mathbf{M}$, and $\mathbf{m} \notin \mathbf{M}$
3. **return** "**m** is not reachable"

Fazit

Der Beweis der Entscheidbarkeit der drei Probleme der Überdeckbarkeit, Beschränktheit und Platzbeschränktheit gelang mithilfe aufwärts oder abwärts geschlossener induktiver Invarianten. Für das Erreichbarkeitsproblem verwendeten wir induktive Invarianten in der reicheren Klasse der Presburger-definierbaren Mengen.

Mit dieser Art von Algorithmen können weitere Probleme gelöst werden. So sind das Boundness-Problem und das Platz-Boundness-Problem für Lossy Channels rekursiv aufzählbar (das ist nach unserer Kenntnis bisher unbekannt gewesen [1, 17]).

Aus Sicht der Komplexitätstheorie zeigt Rackoffs Technik, dass Überdeckbarkeit, Beschränktheit und Platzbeschränktheit EXPSPACE-vollständig sind. Tatsächlich gibt es für den positiven Fall des Überdeckbarkeitsproblems und den negativen Fall von Beschränktheit und Platzbeschränktheit Abläufe, deren Länge doppelt exponentiell in der Größe der Eingabe ist. Das zeigt, dass die drei Algorithmen zur Überdeckbarkeit, Nichtbeschränktheit und Nichtplatzbeschränktheit unmittelbar in optimale EXSPACE-Algorithmen transformiert werden können. Für weitere Algorithmen und Semi-Algorithmen stellt Tab. 1 die Größe von Strukturen (Worte, Wortfolgen, endliche Mengen) zusammen, die ggf. zur Terminierung führen. Ein Beispiels ist der Boundness-Algorithmus aus Abschnitt „Ein Algorithmus zur Entscheidung von Beschränktheit". Aus [6, 14] wissen wir, dass es eine unendliche Sequenz $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Petrinetzen N_n mit jeweils nur endlich vielen erreichbaren Zuständen gibt, sodass die Anzahl der erreichbaren Zustände in der Sequenz nicht primitiv rekursiv ist, sondern in der Größenordnung der Ackermann-Funktion ist. Der Semi-Algorithmus *boundedness* sucht eine Invariante **F**, die die erreichbaren Markierungen enthält. Aus der Sequenz $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entsteht also eine Sequenz $\mathit{Ack}(\mathit{size}(N_n))$. Sie bestimmt die Komplexität des Problems. Die selbe Argumentation trifft auf *place boundedness* und auf *clover* zu.

Tabelle 1 gibt optimale Größen an, die von gewissen Beispielen tatsächlich erreicht werden.

Die Komplexität des Erreichbarkeitsproblems ist mindestens EXSPACE-hard [4]. Von Mayr und Kosaraju, und seit kurzem von Leroux [13] wissen wir, dass es entscheidbar ist. Die genaue Komplexität ist unbekannt. Es ist sogar noch unbekannt, ob das Erreichbarkeitsproblem eine primitiv-rekursive obere Schranke hat. Die in [2] aufgestellte Schranke erwies sich als falsch [12].

Danksagung

Wir danken Pierre McKenzie und Wolfgang Reisig für ihre sorgfältige Durchsicht des Manuskripts, und Wolfgang Reisig für seine Übersetzung ins Deutsche.

Literatur

1. Abdulla PA, Jonsson B (1996) Verifying programs with unreliable channels. Inf Comput 127(2):91–101
2. Bouziane Z (1998) A primitive recursive algorithm for the general petri net reachability problem. FOCS 1998:130–136
3. Bozzelli L, Ganty P (2011) Complexity analysis of the backward coverability algorithm for vass. In: Delzanno G, Potapov I (eds) Reachability Problems – 5th International Workshop, RP 2011, Genoa, Italy, September 28–30, 2011. Proceedings, Lecture Notes in Computer Science, vol 6945, Springer, 96–109
4. Cardoza E, Lipton RJ, Meyer AR (1976) Exponential space complete problems for Petri nets and commutative semigroups: Preliminary report. In STOC'76, ACM, 50–54
5. Demri S (2010) On selective unboundedness of vass. In: Chen YF, Rezine A (eds) Proceedings 12th International Workshop on Verification of Infinite-State Systems, EPTCS, vol 39, 1–15

6. Figueira D, Figueira S, Schmitz S, Schnoebelen P (2011) Ackermannian and primitive-recursive bounds with dickson's lemma. In: Logic in Computer Science (LICS), 26th Annual IEEE Symposium, 269–278
7. Finkel A (1993) The minimal coverability graph for petri nets. In: Rozenberg G (ed) Advances in Petri Nets 1993. Lect Notes Comp Sci, vol 674, Springer, 210–243
8. Finkel A, Schnoebelen Ph (2001) Well-structured transition systems everywhere! Theoret Comput Sci 256:63–92
9. Finkel A, Goubault-Larrecq J (2009) Forward analysis for WSTS, Part I: Completions. In: Albers S, Marion JY (eds) 26th Symp on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS'09, Springer, 433–444
10. Finkel A, Goubault-Larrecq J (2009) Forward analysis for WSTS, Part II: Complete WSTS. In: Albers S, Marchetti-Spaccamela A, Matias Y, Nikoletseas SE, Thomas W (eds) 36th Int. Colloquium on Automata, Languages and Programming, ICALP'09. Lect. Notes Comp Sci, vol 5556, Springer, 188–199
11. Hopcroft JE, Pansiot JJ (1979) On the reachability problem for 5-dimensional vector addition systems. Theor Comput Sci 8:135–159
12. Jančar P (2008) Bouziane's transformation of the petri net reachability problem and incorrectness of the related algorithm. Inf Comput 206:1259–1263
13. Leroux J (2012) Vector addition systems reachability problem (a simpler solution). In: Voronkov A (ed) The Alan Turing Centenary Conference, Turing-100, Manchester UK June 22–25, 2012, Proceedings. EPiC Series, vol 10, EasyChair, 214–228
14. Mayr EW, Meyer AR (1981) The complexity of the finite containment problem for petri nets. J ACM 28(3):561–576
15. Pachl JK (2003) Reachability problems for communicating finite state machines. CoRR cs.LO/0306121
16. Rackoff C (1978) The covering and boundedness problems for vector addition systems. Theoret Comput Sci 6(2):223–231
17. Schnoebelen Ph (2010) Lossy counter machines decidability cheat sheet. In: Kucera A, Potapov I (eds) Proceedings of the 4th Workshop on Reachability Problems in Computational Models (RP'10). Volume 6227 of Lecture Notes in Computer Science, Brno, Czech Republic, Springer, 51–75