Logique 2021
Devoir à la Maison #2

David Baelde

Ceci est la troisième version : voir les annotations V3 en marge pour les modifications.
Le devoir est à rendre pour le 10 mai 2021 avant le cours, sous la forme d'un PDF composé en LaTeXet à déposer sur la page ecampus du cours. Pour rappel, les devoirs maison sont notés et remplaceront au moins en partie les épreuves sur table cette année. Vous pouvez travailler le DM en groupe, mais j'attends des rendus rédigés individuellement.

Le futur est-il écrit à l'avance, ou chaque instant a-t-il plusieurs futurs possibles ? Autrement dit, le temps est-il une ligne droite ou une structure arborescente ? Cette question métaphysique se décline en informatique où les réponses sont plus simples : les deux types de modèles du temps sont utiles, selon le type de systèmes et de propriétés auxquels on s'intéresse. Dans ce devoir, nous étudions deux logiques temporelles simples, une sur chaque type de modèle.

Nous travaillerons dans ce DM sur des structures de Kripke, selon une définition plus générale que celle du cours de logique constructive :

- une structure de Kripke est ici donnée par un ensemble de mondes muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ arbitraire ; ▷V2
- pour chaque monde on a une interprétation des constantes propositionnelles (pour chaque w et P on a $\hat{P}_w \in \{0, 1\}$).

Dans le cours, $\mathcal{R}$ était une relation réflexive et transitive notée $\leq$, et l'interprétation était monotone : ce n'est plus le cas ici.

1 Temps linéaire

On considère des formules construites sur la grammaire suivante :

$$A, A' ::= \top \mid \bot \mid P \mid \neg P \mid A \vee A' \mid A \wedge A' \mid \bigcirc A$$

Il s'agit des formules de la logique propositionnelle, enrichies de l'opérateur $\bigcirc$, en forme normale négative. Ici, P désigne un atome, i.e. une constante propositionnelle. La négation ne porte que sur les atomes, ce qui n'est pas une restriction du fait des lois de de Morgan : on verra que celles-ci s'étendent à notre modalité par $\neg\bigcirc A = \bigcirc\neg A$.

La sémantique de ces formules est donnée en restreignant notre attention aux structures de Kripke linéaires, i.e. celles où pour tout monde w il existe un unique w' tel que $w \ \mathcal{R} \ w'$. Cet unique successeur sera noté $w+1$. Étant donné une structure $\mathcal{S}$ et un monde w de $\mathcal{S}$, on définit par induction sur A l'interprétation de $[\![A]\!]^w_{\mathcal{S}}$:

$$
\begin{array}{rcll}
[\![\top]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 & \\
[\![\bot]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 0 & \\
[\![P]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & \hat{P}_w & \\
[\![\neg P]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 - \hat{P}_w & \\
[\![A \wedge A']\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 \quad \text{ssi} & [\![A]\!]^w_{\mathcal{S}} = 1 \text{ et } [\![A']\!]^w_{\mathcal{S}} = 1 \\
[\![A \vee A']\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 \quad \text{ssi} & [\![A]\!]^w_{\mathcal{S}} = 1 \text{ ou } [\![A']\!]^w_{\mathcal{S}} = 1 \\
[\![\bigcirc A]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & [\![A]\!]^{w+1}_{\mathcal{S}} &
\end{array}
$$

Quand il n'y a pas ambiguité, on pourra omettre $\mathcal{S}$ dans $[\![A]\!]^w_{\mathcal{S}}$.

On dira qu'une formule A est valide quand on a $[\![A]\!]^w_{\mathcal{S}} = 1$ pour toute structure $\mathcal{S}$ et pour tout monde w de $\mathcal{S}$. Quand $[\![A]\!]^w_{\mathcal{S}} = 1$ on dira que $\mathcal{S}, w$ est un modèle de A, ce que l'on notera $\mathcal{S}, w \models A$. Dans le cas contraire on dit que $\mathcal{S}, w$ est un contre-modèle de A.

Question 1

Parmi les formules A_x suivantes, lesquelles sont valides ? Justifier.

$$A_1 \stackrel{\text{def}}{=} P \vee \neg P \qquad A_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \vee (\bigcirc\neg P) \qquad A_3 \stackrel{\text{def}}{=} (\bigcirc P) \vee (\bigcirc\neg P)$$

Correction 1

Les formules A_1 et A_3 sont valides. Pour A_2 il fallait donner un contre-modèle, idéalement en explicitant la structure des mondes considérés : on pouvait considérer deux mondes successeurs l'un de l'autre, ou prendre des mondes w_i pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Question 2

Montrer que toute formule est logiquement équivalente [1] à une formule qui ne contient aucune sous-formule de la forme $\bigcirc\top$, $\bigcirc\bot$, $\bigcirc(A \wedge A')$ ou $\bigcirc(A \vee A')$. ▷V2

1. Deux formules sont logiquement équivalentes quand elles ont les mêmes modèles.

Correction 2
Vous avez presque tous identifié clairement les équivalences logiques permettant cette transformation, mais la mise au point d'une solution globale a posé problème.

Beaucoup d'entre vous ont prétendu prouver que toute formule A admet une forme logiquement équivalente sans les motifs interdits, par induction structurelle sur A. Or, quand A s'écrit $\bigcirc(B \wedge C)$, on la transforme en $(\bigcirc B) \wedge (\bigcirc C)$ puis on veut transformer par hypothèse d'induction $\bigcirc B$ et $\bigcirc C$: cela n'est pas possible dans une induction structurelle (où on n'aurait accès à l'hypothèse d'induction que pour les sous-formules B et C) il fallait donc procéder par induction sur la taille (nombre de symboles) ou la profondeur de la formule A.

Le cas où A est de la forme $\bigcirc\bigcirc B$ a été souvent oublié. Le plus simple en termes de rédaction était de traiter A de la forme $\bigcirc^n B$ directement.

Personne n'a explicité un système de réécriture, sûrement car vous n'en avez pas encore beaucoup utilisés en cours. On pouvait simplement donner un système de transformations s'appliquant aux sous-formules :

$$\bigcirc\top \rightsquigarrow \top \qquad \bigcirc\bot \rightsquigarrow \bot$$

$$\bigcirc(A \wedge B) \rightsquigarrow (\bigcirc A) \wedge (\bigcirc B) \qquad \bigcirc(A \vee B) \rightsquigarrow (\bigcirc A) \vee (\bigcirc B)$$

Pour conclure il suffit d'observer que ces transformations sont compatibles avec l'équivalence logique, et argumenter que l'application itérée de ces transformations termine et donne une solution. Pour la terminaison on peut s'appuyer sur l'ordre multiensemble sur les profondeurs des sous-formules de la forme $\bigcirc A$. Comme vous ne le connaissez sûrement pas, une solution est d'appliquer les transformations aux formules $\bigcirc A$ de profondeur maximale, ce qui fait décroitre la mesure $\langle$ profondeur maximale d'une sous-formule $\bigcirc A$, nombre de sous-formules $\bigcirc A$ de profondeur maximale $\rangle$ selon l'ordre lexicographique.

J'ai enfin rencontré dans quelques copies une confusion entre validité et équivalence logique : attention à être au clair avec cela. Pour $\bigcirc\top$ et $\top$ on a équivalence logique car les deux sont valides, mais ce n'est pas toujours vrai : $\bigcirc(P \wedge Q)$ est logiquement équivalent à $(\bigcirc P) \wedge (\bigcirc Q)$ mais aucune de ces formules n'est valide.

On considère des séquents *monolatères*[2] $\vdash \Gamma$ où Γ est un ensemble de formules. Leur sémantique est donnée en interprétant les ensembles comme des disjonctions : le séquent $\vdash \Gamma$ est valide si $\bigvee_{A \in \Gamma} A$ l'est. On considère les règles de la

2. Intuitivement, on peut se ramener à ces séquents en passant de $\Gamma \vdash \Delta$ à $\vdash \neg\Gamma, \Delta$ et en mettant toutes les formules en forme normale négative.

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top} \quad \frac{}{\vdash \Gamma, P, \neg P} \quad \frac{\vdash \Gamma, A, A'}{\vdash \Gamma, A \vee A'} \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, A'}{\vdash \Gamma, A \wedge A'} \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \bigcirc\Gamma, \Delta}$$

FIGURE 1 – Calcul des séquents pour la logique du temps linéaire.

Figure 1, qui portent sur de tels séquents, comme système de preuve pour notre logique. Dans la dernière règle, $\bigcirc\Gamma$ dénote l'ensemble des formules $\bigcirc A$ tel que $A \in \Gamma$. Ces règles permettent par exemple de construire les dérivations suivantes :

$$\frac{\frac{\frac{}{\vdash \top}}{\vdash P, \bigcirc\top}}{\vdash P \vee \bigcirc\top} \qquad \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{\vdash P, \neg P, \neg Q}}{\vdash P, \neg P \vee \neg Q}}{\vdash \bigcirc P, \bigcirc(\neg P \vee \neg Q)} \quad \frac{\vdots}{\vdash \bigcirc Q, \bigcirc(\neg P \vee \neg Q)}}{\vdash (\bigcirc P) \wedge (\bigcirc Q), \bigcirc(\neg P \vee \neg Q)}}{\vdash \big((\bigcirc P) \wedge (\bigcirc Q)\big) \vee \big(\bigcirc(\neg P \vee \neg Q)\big)}$$

Question 3
Montrer que toutes les règles de la Figure 1 sont correctes : si les prémisses d'une instance de la règle sont valides, la conclusion l'est aussi. On veillera à bien s'appuyer sur la notion de validité formellement définie plus haut.

Correction 3
Question bien traitée, il s'agissait d'une simple vérification. Plusieurs copies ont fait des abus de langage : éviter d'écrire "A est valide dans un monde w", mais préférer "A est vraie dans un monde w". La validité correspond à la vérité/satisfaction dans tous les mondes. Ce genre de confusions est souvent bénin, mais je suis quand même tombé sur des contre-sens à éviter absolument, du genre "si Γ est valide alors il contient une formule valide". C'est faux, mais l'on peut par contre dire que si Γ est vrai dans un monde w alors l'une de ses formules l'est aussi : autrement dit, $[\![\Gamma]\!]^w_S = [\![\bigvee_{A\in\Gamma} A]\!]^w_S = 1$ implique $[\![A]\!]^w_S = 1$ pour un $A \in \Gamma$.

Question 4
Montrer que les quatre premières règles sont inversibles : si la conclusion est valide alors les prémisses aussi.

Correction 4
Rien à signaler, et cette question a parfois été traitée en même temps que la précédente, en raisonnant par équivalences.

Question 5
Considérons une instance de la dernière règle telle que Δ ne contient que des atomes, négations d'atomes ou $\bot$, et ne contient pas à la fois un atome et sa négation. Montrer que si la conclusion est valide alors la prémisse l'est aussi. ▷V3

Correction 5
L'idée générale est très souvent bien comprise, mais j'ai exigé une certaine attention aux détails pour avoir tous les points. Par l'absurde, on suppose la conclusion valide et la prémisse invalide. Cela nous donne une structure $\mathcal{S}$ et un monde w tel qu'aucune formule de la prémisse n'est vraie dans w. L'idée est alors d'adapter la structure pour obtenir un prédecesseur de w dans lequel toutes les formules de Δ sont fausses, ce qui va contredire la validité du séquent conclusion.

J'ai critiqué plusieurs copies qui ajoutent un successeur à w, créant ainsi potentiellement plusieurs successeurs pour un même monde… avant de réaliser que mon énoncé l'autorisait – j'aurais pu l'interdire, sans rien changer aux questions, et cela aurait été plus naturel pour des structures qualifiées de "linéaires". Vous pouvez ignorer ces commentaires.

J'ai surtout exigé une attention aux détails : quand on déroule précisément l'argument ci-dessus, on a par hypothèse un contre-modèle $\mathcal{S}, w$ pour Γ et pour obtenir la contradiction finale on a besoin que Γ soit faux dans $\mathcal{S}', w$ où $\mathcal{S}'$ est la structure où on a rajouté un prédecesseur à w. La plupart des solutions ont complètement ignoré cette étape, et n'ont eu que la moitié des points.

Question 6
En déduire que le calcul est complet : tout séquent valide est dérivable.

Correction 6
Question généralement bien traitée, il fallait faire une induction sur le nombre de symboles du séquent. Ici encore une induction structurelle ne convenait pas. En fait, pour donner du sens à la notion d'induction structurelle sur des ensembles finis de formules il faudrait définir inductivement les ensembles finis. Le procédé inductif le plus naturel serait de partir de l'ensemble vide et d'y ajouter des éléments, mais alors l'induction "structurelle" ne donne accès à l'hypothèse d'induction que pour les sous-ensembles.

2 Temps arborescent

On considère maintenant un nouveau langage pour les formules, en remplaçant la modalité $\bigcirc$ par les modalités $\Box$ et $\Diamond$:

$$A, A' ::= \top \mid \bot \mid P \mid \neg P \mid A \vee A' \mid A \wedge A' \mid \Box A \mid \Diamond A$$

La sémantique de cette logique est définie sur des structures de Kripke quelconques — on pourrait se restreindre aux arbres, mais cela ne changerait rien [3]. On oublie donc la contrainte de linéarité : un monde peut avoir plusieurs successeurs ; il peut aussi n'en avoir aucun. La définition formelle de la sémantique ne change que pour les modalités :

$$\begin{array}{lcll} [\![\Box A]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 \quad \text{ssi} & [\![A]\!]^{w'}_{\mathcal{S}} = 1 \text{ pour tout } w' \text{ tel que } w \mathrel{\mathcal{R}} w' \\ [\![\Diamond A]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 \quad \text{ssi} & [\![A]\!]^{w'}_{\mathcal{S}} = 1 \text{ pour un } w' \text{ tel que } w \mathrel{\mathcal{R}} w' \end{array}$$

Question 7
Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides ? Justifier.

$$A_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\Diamond\neg P) \vee (\Diamond P) \qquad A_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\Box\neg P) \vee (\Box P) \qquad A_3 \stackrel{\text{def}}{=} (\Box\bot) \vee (\Diamond\top)$$

Correction 7
Seule la dernière formule est valide. Pour la première, considérer un monde sans successeur. Pour la seconde, considérer un monde avec deux successeurs.

On considère pour la logique du temps arborescent un calcul des séquents défini par les mêmes quatre premières règles que dans la section précédente, mais en remplaçant la règle modale précédente par la suivante :

$$\frac{\vdash A, \Gamma}{\vdash \Box A, \Diamond\Gamma, \Delta}$$

Dans cette règle, les ensembles de formules Γ et Δ peuvent être vides — mais il n'est pas question pour la formule A d'être vide. On peut ainsi dériver, par exemple : ▷V2

$$\frac{\overline{\vdash P, \neg P, R}}{\vdash \Box P, \Box Q, \Diamond\neg P, \Diamond R, S} \qquad \frac{\overline{\vdash \top}}{\vdash \Box\top}$$

3. Ceci est un corollaire du résultat de complétude que vous allez démontrer.

Question 8
Montrer que cette nouvelle règle modale est correcte.

Correction 8
On considère une structure $\mathcal{S}$ et l'un de ses mondes w. Par validité de la prémisse on sait que pour tout successeur de w (il peut y en avoir zéro ou plusieurs, ça ne change rien) une formule de A, Γ sera vraie. Si c'est toujours A alors $\Box A$ sera vraie en w, sinon on aura un successeur w' pour lequel une formule de Γ sera vraie, donc une formule de $\Diamond\Gamma$ sera vraie en w. Donc $\Box A, \Diamond\Gamma$ est valide, et a fortiori le séquent conclusion avec Δ en plus est valide.

On en conclut que les séquents dérivables sont valides. On cherche maintenant à montrer la complétude du calcul. On admettra que les quatre premières règles de la Figure 1 sont inversibles pour la sémantique arborescente.

Question 9
On considère un séquent $\vdash \Box A_1, \ldots, \Box A_n, \Diamond\Gamma, \Delta$ pour $n \geq 0$, où Δ ne contient que des atomes, négations d'atomes et éventuellement $\bot$, et ne contient pas à la fois un atome et sa négation. Montrer que si tous les séquents $\vdash A_i, \Gamma$ sont invalides, alors le séquent précédent est aussi invalide. ▷V3

Correction 9
On suppose qu'on a pour chaque i une structure $\mathcal{S}_i$ et un monde w_i tel que $[\![A_i, \Gamma]\!]^{w_i}_{\mathcal{S}_i} = 0$. On construit une structure $\mathcal{S}$
- avec pour mondes les mondes de $\mathcal{S}_i$ (qu'on peut supposer disjoints) ainsi qu'un monde spécial w
- tel que $\hat{P}_w = 0$ pour $P \in \Delta$ et $\hat{P}_w = 1$ sinon,
- et en prenant pour relation $\mathcal{R}$ l'union des relations des $\mathcal{S}_i$ à laquelle on rajoute $w \mathrel{\mathcal{R}} w_i$ pour tout i.

On remarque que $[\![A_i, \Gamma]\!]^{w_i}_{\mathcal{S}} = 0$ car le monde w_i a les mêmes futurs dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_i$. On vérifie enfin que $\mathcal{S}, w$ est un contre-modèle de notre séquent conclusion. Cet argument semble en général bien compris, par contre plusieurs solutions ont traité à part le cas $n = 0$ alors qu'il est en fait déja pris en compte dans le schéma général.

Question 10
En conclure que ce calcul des séquents est complet pour la logique du temps arborescent.

Correction 10
Comme avant, les séquents valides sont prouvables, par induction sur le nombre

de symboles du séquent : si l'on peut appliquer l'une des quatre premières règles, on le fait, et on utilise leur inversibilité et l'hypothèse d'induction pour conclure ; sinon on est dans le cadre de la question précédente, contraposée : puisque le séquent conclusion est valide, il existe une façon d'appliquer la règle modale (en choisissant un $\Box A_i$) qui va donner une prémisse valide, ce qui permet de conclure par hypothèse d'induction.

Question 11
Proposer une nouvelle règle, ou une modification de la règle modale, pour obtenir un calcul correct et complet quand l'on modifie la sémantique en ne considérant que des structures sans extrémité (tout monde a au moins un successeur).

Correction 11
Si tout monde a un successeur alors, par exemple, $\Diamond\top$ devient valide. On peut ajouter la règle suivante :

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Diamond\Gamma, \Delta}$$

On constate aisément qu'elle est valide : si on considère un monde w, on prend un successeur arbitraire de w, par validité de Γ on a un $\Diamond A$ dans la conclusion qui va être vrai en w. Pour la complétude c'est plus compliqué : la question 9 ne marche plus car on y construisait parfois un monde w sans successeur, quand $n = 0$. Il faut ajouter l'hypothèse que Γ n'est pas valide, ce qui va permettre d'adapter l'argument et aussi le résultat de complétude, puisque cette hypothèse va correspondre au cas où on n'arrive pas à dériver $\Box A_1, \dots, \Box A_n, \Diamond\Gamma, \Delta$ par notre nouvelle règle.

Peu d'étudiants semblent avoir remarqué que la question 9 devient fausse pour $n = 0$, et il n'a pas toujours été clairement dit qu'elle reste vraie pour $n > 0$.

Question 12
Même question quand on se restreint aux structures transitives, i.e. les structures où, pour tous w_1, w_2, w_3 tel que $w_1 \mathcal{R} w_2 \mathcal{R} w_3$ on a aussi $w_1 \mathcal{R} w_3$.

Correction 12
On modifie la règle modale comme suit :

$$\frac{\vdash A, \Gamma, \Diamond\Gamma}{\vdash \Box A, \Diamond\Gamma, \Delta}$$

On vérifie la validité. Si dans tout successeur de w une formule de $A, \Gamma, \Diamond\Gamma$ est vraie alors soit $\Box A$ est vrai dans w soit il existe un successeur w' tel qu'une formule de Γ, $\Diamond\Gamma$ est vraie en w'. Si c'est une formule de Γ, la formule correspondante dans $\Diamond\Gamma$ est conclusion est vraie en w. Si c'est une formule de $\Diamond\Gamma$ alors il existe un successeur w'' de w' tel qu'une formule de Γ est vraie en w''. On conclut par transitivité que la formule correspondante de $\Diamond\Gamma$ est vraie en w.

Pour la complétude, on ne peut plus raisonner sur la taille des séquents. Deux copies ont mis en évidence des exemples concrets de cycles apparaissant dans la recherche de preuve, avec dans un cas l'idée que ces cycles peuvent être transformés en cycles dans une construction de contre-modèle. Un preuve possible consiste effectivement à construire un contre-modèle pour tout séquent non prouvable : je la présente ci-dessous pour les curieux.

On note $\Gamma \to \Gamma'$ quand Γ et Γ' sont respectivement conclusion et prémisse de l'application de l'une des quatre premières règles. Quand Γ est non-prouvable, il existe toujours au moins un Γ' non prouvable tel que $\Gamma \to^* \Gamma' \not\to$, c'est à dire qu'on ne peut plus appliquer aucune des quatre règles à Γ'. Dans ce cas on notera $\Gamma \Rightarrow \Gamma'$.

On considère la structure dont les mondes sont w_Γ où Γ est un séquent non prouvable sur lequels les quatre premières règles ne s'appliquent pas. L'objectif va être que w_Γ soit un contre-modèle de Γ. On pose donc $\hat{P}_{w_\Gamma} = 1$ ssi $P \notin \Gamma$. Pour tout monde w_Γ, le séquent Γ est de la forme $\Box A_1, \ldots, \Box A_n, \Diamond\Gamma_1, \Delta$ où Δ est comme dans la question 9. De plus, comme le séquent n'est pas prouvable, aucun des $A_i, \Gamma_1, \Diamond\Gamma_1$ ne l'est. On définit alors les successeurs immédiats de notre monde comme les $w_{\Gamma''}$ tel que $A_i, \Gamma_1, \Diamond\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma''$. La relation $\mathcal{R}$ est la clôture transitive de cette relation de succession immédiate.

On montre, pour tout séquent non prouvable Γ, pour tout $\Gamma \Rightarrow \Gamma'$ et $A \in \Gamma$, que $[\![A]\!]_{w_{\Gamma'}} = 0$. On procède par induction sur A.

- La formule ne peut pas être $\top$ sinon le séquent serait prouvable.
- Si A est $\bot$ le résultat est immédiat.
- Si A est un litéral, on remarque que $A \in \Gamma'$. De plus, Γ' ne peut contenir un litéral et sa négation, sinon il serait prouvable. Par construction de $\hat{P}_{w_{\Gamma'}}$ on a le résultat.
- Si A est une conjonction, il existe $\Gamma \to \Gamma_1 \Rightarrow \Gamma'$ (quitte à permuter des règles) tel qu'une des sous-formules de A est dans Γ_1. Cela permet de conclure par hypothèse d'induction sur cette sous-formule.
- Si A est une disjonction, il existe $\Gamma \to \Gamma_1 \Rightarrow \Gamma'$ tel que les deux sous-formules sont dans Γ_1 : on conclut par hypothèse d'induction sur celles-ci.
- Si A est de la forme $\Box B$, on aura encore $\Box B \in \Gamma'$ et, par définition de la structure, il existe $(B, \ldots) \Rightarrow \Gamma''$ tel que $w_{\Gamma'}\ \mathcal{R}\ w_{\Gamma''}$. On conclut par hypothèse d'induction sur B que B est faux en $w_{\Gamma''}$ donc A est faux en $w_{\Gamma'}$.

- Si A est de la forme $\Diamond B$, on remarque que tous les successeurs de $w_{\Gamma'}$ sont des $w_{\Gamma''}$ pour $(B, \Diamond B, \ldots) \Rightarrow \Gamma''$: c'est vrai pour les successeurs immédiats, et cela reste vrai par clôture transitive car on a gardé $\Diamond B$ à chaque étape. On en conclut que B est faux dans tous les successeurs, donc A est faux en $w_{\Gamma'}$.

Bien sûr, notre construction donne des structures où la relation successeur comporte des cycles. On pourra remarquer que ce type d'argument s'adapte au cas précédent et qu'il donnerait alors des graphes acycliques. On peut aussi être plus économe dans la construction et ne considérer que des séquents effectivement générés par recherche de preuve à partir du séquent de départ.