Logique Informatique

Partiel 2019

Exercice 1 (déduction naturelle classique)

Pour chacun des séquents suivants, donner un contre-modèle[1] ou une preuve dans NK_0.

1. $\neg\neg(A \vee \neg A) \vdash A$
   Corrigé : Toute interprétation satisfait $A \vee \neg A$, donc $\neg\neg(A \vee \neg A)$, donc toute interprétation qui ne satisfait pas A (e.g. l'interprétation vide) est un contre-modèle du séquent.
2. $\neg(A \vee \neg A) \vdash A$
   Corrigé : On pose $\Gamma = \neg(A \vee \neg A), \neg A$ et on dérive :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg(A \vee \neg A)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg A$}
\RightLabel{$\vee$I}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \vee \neg A$}
\RightLabel{$\bot$E}
\BinaryInfC{$\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \bot$}
\RightLabel{Abs}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash A$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 2 (quizz)

Nous nous plaçons en calcul propositionnel classique. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer s'il est vrai ou faux, en justifiant.

1. Si une formule a un modèle alors elle a un modèle fini, i.e. un sous-ensemble fini de $\mathcal{P}$.
   Vrai : si $I \models \varphi$ alors $I \cap \mathcal{P}(\varphi) \models \varphi$ car les deux interprétation coïncident sur les variables de $\mathcal{P}$ apparaissant dans φ (noté ici $\mathcal{P}(\varphi)$) et l'interprétation restreinte à ces variables est finie car $\mathcal{P}(\varphi)$ l'est.
2. Deux ensembles de formules admettant le même arbre sémantique ont les mêmes modèles.
   Vrai car les modèles d'une formule correspondent exactement aux branches infinies d'un de ses arbres sémantiques (on suppose ici que $\mathcal{P}$ est infini dénombrable, la réponse est un peu plus longue si l'on veut traiter le cas $\mathcal{P}$ fini, ce que je n'exigeais pas).
3. On garde la complétude réfutationnelle de la résolution binaire si l'on contraint la résolution au cas où au moins une prémisse ne contient que des littéraux positifs et la factorisation au cas où tous les littéraux sont négatifs.
   Faux, on vérifie que la clause vide ne peut être dérivée par ces règles à partir du contre-exemple insatisfaisable typique : $\{P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q, \neg P \vee Q\}$.
4. Si E est un ensemble de clauses insatisfaisable, alors toute clause est dérivable à partir de E en utilisant la résolution binaire, la factorisation, l'affaiblissement mais pas le tiers-exclu.
   Vrai : si E est insatisfaisable on peut dériver la clause vide avec la résolution et

1. On fait de la logique classique, on attend donc une interprétation $I \subseteq \mathcal{P}$.

la factorisation (complétude réfutationnelle) puis l'affaiblissement permet de dériver toute clause depuis $\bot$.

5. Toute clause valide est dérivable en utilisant uniquement le tiers-exclu et l'affaiblissement.
Vrai car une clause valide contient nécessairement un littéral et sa négation, on peut donc la dériver par tiers-exclu puis affaiblissement.

Exercice 3 (non-non traduction)

NB : Le calcul LJ donné dans le partiel était incomplet sans la contraction à gauche, mais cela ne faisait que simplifier l'exercice à mon avis.

1. Montrer que pour tout φ on a $\vdash_{LK} (\varphi)^* \Leftrightarrow \varphi$.
Corrigé : On montre aisément par induction sur φ que φ et $(\varphi)^*$ sont logiquement équivalentes. Par complétude de LK on peut donc dériver l'équivalence demandée.
2. Montrer que pour tout φ on a $\vdash_{LJ} \neg\neg(\varphi)^* \Rightarrow (\varphi)^*$.
Corrigé : Un argument sémantique est plus difficile ici, on montre donc directement la prouvabilité par induction sur φ :
— Pour $\varphi \equiv \bot$ il faut vérifier $\vdash_{LJ} \neg\neg\bot \Rightarrow \bot$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot \vdash \bot}}{\vdash \neg\bot} \quad \dfrac{}{\bot \vdash \bot}}{\neg\neg\bot \vdash \bot}}{\vdash \neg\neg\bot \Rightarrow \bot}$$

— Pour $\varphi \equiv P$ on utilisé la notation $\neg^k P$ définie de façon évidente et on dérive :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg P \vdash \neg P} \quad \dfrac{}{\neg P, \bot \vdash \bot}}{\neg P, \neg^2 P \vdash \bot}}{\neg P \vdash \neg^3 P} \qquad \dfrac{}{\bot, \neg P \vdash \bot}}{\neg^4 P, \neg P \vdash \bot}}{\neg^4 P \vdash \neg^2 P}}{\vdash \neg^4 P \Rightarrow \neg^2 P}$$

— Enfin pour $\varphi \equiv \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ on a par hypothèse d'induction un dérivation Π_2 de $\psi_2 \equiv \neg\neg(\varphi_2)^* \Rightarrow (\varphi_2)^*$, on pose $\psi = \neg\neg((\varphi_1)^* \Rightarrow (\varphi_2)^*)$ et on utilise la règle admissible cut pour dériver le séquent attendu :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_2}{\vdash \psi_2} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\varphi_1)^*, \neg(\varphi_2)^*, (\varphi_1)^* \Rightarrow (\varphi_2)^* \vdash \bot}\;{\Rightarrow_L}\text{ sur } (\varphi_1)^* \Rightarrow (\varphi_2)^*, \ldots}{\psi, (\varphi_1)^*, \neg(\varphi_2)^* \vdash \bot}\;{\Rightarrow_L}\text{ sur } \psi, \bot_L, \Rightarrow_R}{\psi, (\varphi_1)^* \vdash \neg\neg(\varphi_2)^*}\;{\Rightarrow_L}}{\psi, (\varphi_1)^*, \neg\neg(\varphi_2)^* \Rightarrow (\varphi_2)^* \vdash (\varphi_2)^*}\;{\Rightarrow_L}\text{ sur } \neg\neg(\varphi_2)^* \Rightarrow (\varphi_2)^*, \text{ax}}{\psi, (\varphi_1)^* \vdash (\varphi_2)^*}\;\text{cut}}{\vdash \psi \Rightarrow (\varphi_1)^* \Rightarrow (\varphi_2)^*}\; 2 \times {\Rightarrow_R}$$

3. Montrer que pour tout Γ et Δ, on a $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ ssi $(\Gamma)^*, \neg(\Delta)^* \vdash_{LJ} \bot$.
Corrigé du sens LJ$\Rightarrow$LK. Un séquent dérivable dans LJ étant dérivable dans LK

on a $(\Gamma)^*, \neg(\Delta)^* \vdash_{LK} \bot$. En utilisant l'équivalence logique de la première question, on obtient que $\Gamma \vdash \Delta$ est lui aussi valide donc dérivable dans LK.

Corrigé du sens LK⇒LJ : On procède par induction sur la dérivation LK de $\Gamma \vdash \Delta$ et considère les quatre règles possibles qui peuvent conclure cette dérivation :

— Si la dernière règle est $\Rightarrow_R$ notre dérivation LK est de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\Pi'}{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2, \Delta'}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2, \Delta'}$$

et par hypothèse d'induction sur Π' on a une dérivation LJ Π'_J du séquent

$$(\Gamma)^*, (\varphi_1)^*, \neg(\varphi_2)^*, \neg(\Delta')^* \vdash \bot.$$

On dérive dans LJ le séquent attendu :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi'_J}{(\Gamma)^*, \neg(\Delta')^*, (\varphi_1)^*, \neg(\varphi_2)^* \vdash \bot}}{(\Gamma)^*, \neg(\Delta')^*, (\varphi_1)^* \vdash (\varphi_2)^*}\text{ cut avec } \neg\neg(\varphi_2)^* \Rightarrow (\varphi_2)^*, \Rightarrow_R}{(\Gamma)^*, \neg(\Delta')^* \vdash (\varphi_1)^* \Rightarrow (\varphi_2)^*}\Rightarrow_I}{(\Gamma)^*, \neg((\varphi_1)^* \Rightarrow (\varphi_2)^*), \neg(\Delta')^* \vdash \bot}\Rightarrow_L, \ldots$$

— Les autres cas étaient attendus aussi, mais je ne les détaille pas ici.

4. Conclure que φ est valide en logique classique ssi $(\varphi)^*$ est valide en logique intuitionniste.

   Corrigé : Si φ est valide en logique classique alors $(\varphi)^*$ aussi donc $\vdash_{LK} (\varphi)^*$ par complétude, donc $\neg(\varphi)^* \vdash_{LJ}$ par la question précédente, donc $\vdash_{LJ} (\varphi)^*$ par la seconde question, donc cette formule est valide en logique intuitionniste. Réciproquement, si $(\varphi)^*$ est valide en logique intuitionniste alors elle est aussi valide classiquement, donc φ qui lui est logiquement équivalente est valide classiquement.

Exercice 4 (logique intuitionniste)

1. Soit ψ une formule quelconque. Pour chacun des C_i suivants, existe-t-il une formule φ_i telle que, pour toute structure de Kripke, $\mathcal{K}, w \models \varphi_i$ ssi $(\mathcal{K}, w) \in C_i$? Justifier.

   — $C_1 = \{(\mathcal{K}, w) \mid \text{il existe } w' \geq w \text{ tel que } w' \models \psi\}$

   Corrigé : impossible car si une formule φ_1 pouvait exprimer que P est vrai dans un futur, alors par monotonicité (résultat du cours) cette formule devrait rester vraie dans tout futur ; or, il existe une structure à trois mondes (une racine, deux futurs incomparables avec P vrai dans un seul) où φ_1 devrait être vraie à la racine mais pas dans tout futur.

   — $C_2 = \{(\mathcal{K}, w) \mid \text{pour tout } w' \geq w \text{ on a } w' \models \psi\}$

   Corrigé : $\varphi_2 \equiv \psi$ convient car, par monotonicité, "pour tout $w' \geq w$, $w' \models \psi$" est équivalent à "$w \models \psi$".

   — $C_3 = \{(\mathcal{K}, w) \mid \text{il n'existe pas de } w' > w\}$

   Corrigé : Impossible, en considérant une structure K avec deux mondes w et w' et $\alpha(w) = \alpha(w')$. On peut alors montrer que $K, w \models \varphi$ ssi $K, w' \models \varphi$. Une direction est la monotonicité, l'autre se montre par induction sur φ. Le cas intéressant est $\varphi \equiv \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$. On suppose $w' \models \varphi$ et on veut montrer $w \models \varphi$, on considère donc les deux futurs possibles : si $w \models \varphi_1$ alors $w' \models \varphi_1$ par monotonicité et donc $w' \models \varphi_2$, d'où $w \models \varphi_2$ par hypothèse d'induction ; si $w' \models \varphi_1$ alors on conclut immédiatemment $w' \models \varphi_2$.

2. Soit une formule propositionnelle φ, et soit P_1, ..., P_n les variables propositionnelles qui y apparaissent. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   a. φ est valide en logique classique ;
   b. $\varphi \wedge \bigwedge_{i\in[1;n]} P_i \vee \neg P_i$ est valide en logique intuitionniste.

   Corrigé : C'est faux, il faut en fait considérer la formule $(\bigwedge_{i\in[1;n]} P_i \vee \neg P_i) \Rightarrow \varphi$! Le sens "b implique a" est facile, avec la formule corrigée ou pas, car validité intuitionniste implique validité classique, et la formule est logiquement équivalente à φ en logique classique. Pour l'autre direction, on suppose φ classiquement valide et considère une structure K et un monde w de K tel que $K, w \models (\bigwedge_{i\in[1;n]} P_i \vee \neg P_i)$. On remarque que cela implique $\alpha(w_1) = \alpha(w_2)$ pour tous w_1 et w_2 tels que $w \leq w_1$ et $w \leq w_2$. On peut alors montrer, pour toute formule ψ, que $\alpha(w) \models \psi$ entraîne $K, w' \models \psi$ pour tout $w \leq w'$, où $\alpha(w)$ est utilisé comme une interprétation. Cela se fait par une simple induction. On conclut en utilisant la validité classique de φ : on a $\alpha(w) \models \varphi$, donc $K, w \models \varphi$ comme attendu.