TD12 7 mai 2015

Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1 — Ordres discrets

On considère $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{ =, \geq \}$. On axiomatise les ordres discrets par les axiomes de l'égalité et :

Refl.	$\forall x.\ x \geq x$
Anti.	$\forall x \forall y.\ x \geq y \to y \geq x \to x = y$
Trans.	$\forall x \forall y \forall z.\ x \geq y \to y \geq z \to x \geq z$
Tot.	$\forall x \forall y.\ x \geq y \lor y \geq x$
Min.	$\exists x \forall y.\ y \geq x$
D1	$\forall x \exists y.\ y \geq x \land y \neq x \land \forall z.\ z \geq x \to z \neq x \to z \geq y$
D2	$\forall x.\ (\forall y.\ y \geq x) \lor \exists y.\ x \geq y \land y \neq x \land \forall z.\ x \geq z \to z \neq x \to y \geq z$

On note D cet ensemble d'axiomes, et D' les deux suivants :

Zéro	$\forall x.\ x = 0 \leftrightarrow \forall y.\ y \geq x$
Succ.	$\forall x \forall y.\ s(x) = y \leftrightarrow (y \geq x \land y \neq x \land \forall z.\ z \geq x \to z \neq x \to z \geq y)$

On s'intéresse à la décidabilité de $D \models \phi$.

1. Montrer que les formules suivantes sont des conséquences de $D + D'$:
   (a) $\forall x.\ x \geq 0$
   (b) $\forall x.\ 0 \neq s(x)$
   (c) $\forall x.\ x \neq 0 \leftrightarrow \exists y.\ x = s(y)$
   (d) $\forall xy.\ \neg(x \geq y) \leftrightarrow y \geq s(x)$
   (e) $\forall x \forall y.\ s(x) \geq s(y) \to x \geq y$
2. Montrer que $D + D'$ est une extension conservative de D, c'est à dire que pour tout $\phi \in \mathsf{FO}(\mathcal{P}, \mathcal{F})$, on a $D \models \phi$ ssi $D + D' \models \phi'$.
3. Donner un modèle de $D + D'$ dans lequel l'ordre ne soit pas bien fondé.
4. Montrer que la théorie des ordres discrets est complète et récursive, en procédant par élimination des quantificateurs.