TD11 16 avril 2015

Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Résolution

Exercice 1 (TD 10, exercice 5)
On considère le calcul des séquents classique du premier ordre LK_1.

1. Montrer que, si la clause $\forall x_1 \ldots x_n.\ H_1 \Rightarrow \ldots H_n \Rightarrow C$ appartient à Γ, alors la règle suivante est admissible :

$$\frac{\Gamma \vdash H_1\theta \quad \ldots \quad \Gamma \vdash H_n\theta}{\Gamma \vdash C\theta}\ \text{backchain}$$

   On n'oubliera pas le cas $n = 0$.

2. Montrer que cette règle est aussi complète pour les séquents de la forme $\Gamma \vdash P$ où Γ ne contient que des clauses de Horn et P est un littéral positif.

Exercice 2
En cours on a défini $\mathrm{NAF}(A)$ comme l'existence d'une fonction de sélection pour laquelle on a un SLD-arbre d'échec fini pour A. On admettra qu'il suffit de considérer une fonction de sélection *équitable*, c'est à dire qu'elle finit toujours par sélectionner un littéral.

1. Montrer que s'il existe une SLD-dérivation infinie pour la clause négative $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$ alors il existe un i et une instance close $A_i\theta$ de A_i tel que $A_i\theta \notin \phi_P \downarrow \omega$.
2. En déduire l'équivalence annoncée en cours : $\mathrm{NAF}(A)$ ssi $A \notin \phi_P \downarrow \omega$.

Déduction naturelle

Exercice 3
On considère le calcul suivant, complet pour le fragment $\Rightarrow, \forall$ de la logique intui-

tionniste du premier ordre :

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ \text{ax} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} \Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi} \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x.\ \phi}\ \forall_i\ (x \text{ frais}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.\ \phi}{\Gamma \vdash \phi[t/x]}\ \forall_e$$

Ce système sera simplement appelé NJ dans la suite. Une dérivation de NJ est dite sans détour si elle ne contient pas d'élimination sur un connecteur logique qui vient d'être introduit. On formalise cela par une version du système utilisant des annotations contraignant la forme des dérivations :

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash_e \phi}\ \text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash_e \phi}{\Gamma \vdash_i \phi}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash_i \psi}{\Gamma \vdash_i \phi \Rightarrow \psi} \Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash_e \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash_i \phi}{\Gamma \vdash_e \psi} \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash_i \phi}{\Gamma \vdash_i \forall x.\ \phi}\ \forall_i\ (x \text{ frais}) \qquad \frac{\Gamma \vdash_e \forall x.\ \phi}{\Gamma \vdash_i \phi[t/x]}\ \forall_e$$

1. Si Γ est composée de clauses de Horn (du premier ordre) quelle est la forme des dérivations de $\Gamma \vdash P$? (Où P est un littéral positif.) Quel rapport avec Prolog ?
2. Montrer que si $\Gamma \vdash_i \phi$ est dérivable, et que $\Gamma, \phi \vdash_x \psi$ est dérivable (pour $x \in \{i, e\}$) alors $\Gamma \vdash_i \psi$ aussi.
3. Montrer que si $\Gamma \vdash \phi$ est dérivable dans NJ alors $\Gamma \vdash_i \phi$ aussi.

Calcul des séquents

Exercice 4
On considère la variante suivante du calcul des séquents classique, qu'on appelera LK : on considère les règles de contraction (à gauche et à droite) ainsi que

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P, \Delta} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \phi, \Delta_2 \quad \Gamma_2, \psi \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta_1, \Delta_2} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, \phi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.\ \phi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.\ \phi, \Delta}\ (x \text{ frais})$$

1. On suppose Γ composé uniquement de clauses de Horn, et que Δ est composé uniquement de littéraux négatifs. Montrer qu'on peut alors se passer des règles $\forall_R$ et $\Rightarrow_R$. On fera cette hypothèse dans la suite.

2. On souhaite montrer qu'on peut restreindre la contraction à gauche aux seules formules initialement présentes dans le séquent. Pour cela, montrer que si $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable alors $\Gamma^* \vdash \Delta$ est dérivable sans la règle de contraction gauche, où Γ^* est un multi-ensemble obtenu à partir de Γ en dupliquant des éléments.
3. Soit une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ sans contraction à gauche. On veut montrer que $\Gamma = \Gamma', \phi$ avec $\phi = \forall x_1 \dots x_n.\ P_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_m \Rightarrow Q$, et qu'il existe un θ tel que $Q\theta \in \Delta$ tel que la dérivation puisse être transformée en une dérivation de la forme suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma \vdash P_1\theta} \quad \dots \dfrac{\Pi_m}{\Gamma \vdash P_m\theta} \quad \dfrac{}{\Gamma, Q\theta \vdash \Delta}\,\mathrm{ax}}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}$$

   Pour cela considérer la relation $<$ sur les occurrences des formules de Γ (on distingue deux occurrences de la même formule) définie par $\phi < \psi$ s'il y a un séquent $\Gamma', \psi' \vdash Q, \Delta'$ dans la dérivation originale avec ψ' formule descendante de ψ et Q descendant de ϕ. Montrer que la relation est acyclique, et considérer une formule extrémale pour $<$ dans Γ.
4. Conclure que la règle backchain, à elle seule, est complète pour les séquents considérés :

$$\dfrac{\Gamma \vdash P_1\theta \quad \dots \Gamma \vdash P_m\theta \quad Q\theta \in \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}$$