Logique Informatique

Partiel 2014–2015

Vous avez trois heures. Tous les documents sont autorisés. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans démonstration.

1 Logique propositionnelle classique

Exercice 1

L'ensemble de clauses suivant est-il satisfaisable ? Justifier. ($\mathcal{P} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$).

$$\{(A_i \wedge A_{i+1}) \Rightarrow A_{i+2} \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{A_0 \vee A_2,\ \neg A_1 \vee \neg A_3,\ A_1 \vee A_3\}$$

Corrigé

C'est satisfaisable : l'interprétation qui met tout le monde à faux sauf A_0 et A_3 est un modèle.

Exercice 2

On considère la règle de résolution binaire, et la règle de factorisation, restreinte au cas où le littéral factorisé est négatif. Obtient-on un système réfutationellement complet pour le calcul propositionnel en forme clausale ?

Corrigé

C'est réfutationellement complet, et il y a deux preuves possibles.

- L'approche qui vous a le plus réussi est de reprendre la preuve du cours : soit E insatisfaisable, et E' ses conséquences par résolution et factorisation négative, on considère son arbre sémantique, on sait qu'il est fini et on suppose par l'absurde qu'il est non restreint à une feuille...En considérant un noeud de profondeur maximal on arrive à une contradiction presque comme dans le cours, sauf qu'il faut utiliser la résolution plusieurs fois pour compenser le fait qu'on ne peut factoriser le littéral maximal du côté où il est positif.
- L'autre approche est d'opérer par réécriture de dérivation, et là vous avez eu plus de mal à rédiger. Le mieux était de montrer que si une clause C est dérivable par résolution et factorisation usuelle à partir d'un ensemble E alors on peut dériver, par résolution et factorisation négative, une clause C' telle que C s'obtient à partir de C' par

factorisations positives. Cela se fait par une simple induction sur la dérivation. Le cas intéressant est quand on a dans la dérivation originale une résolution à la racine, et que le littéral positif éliminé par cette résolution est dupliqué dans la dérivation obtenue par hypothèse d'induction : alors il faut appliquer la résolution plusieurs fois pour éliminer toutes les copies.

2 Logique propositionnelle intuitionniste

On considère dans cette partie que $\neg P$ est défini comme $P \Rightarrow \bot$. On rappelle en Figure **??** les règles du calcul des séquents intuitionniste LJ. On veillera à respecter cette définition, en justifiant toute utilisation d'une règle admissible.

Exercice 3

Pour chaque formule, indiquer si elle est valide en logique intuitionniste. Si elle l'est, donner une dérivation en LJ. Sinon, donner un contre-modèle.

1. $\neg(P \lor Q) \Rightarrow (\neg P) \land (\neg Q)$
2. $\neg(P \land Q) \Rightarrow (\neg P) \lor (\neg Q)$
3. $((\neg P) \land (\neg Q)) \Rightarrow \neg(P \lor Q)$
4. $P \lor (P \Rightarrow Q) \lor \neg Q$
5. $\neg\neg(P \lor \neg P)$
6. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

Corrigé

1. C'est dérivable et vous avez presque tous trouvé la dérivation. Seule erreur notable : quelqun a utilisé des séquents classiques à multiples conclusion.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}}{P \vdash P \lor Q} \quad \dfrac{}{\bot \vdash \bot}}{\neg(P \lor Q), P \vdash \bot}\Rightarrow_L}{\neg(P \lor Q) \vdash \neg P}\Rightarrow_R \qquad \dots}{\vdash \phi}\Rightarrow_R, \text{contraction}, \land_R$$

2. Ce n'est pas valide : on considère une structure à trois mondes, w tel que $\alpha(w) = \emptyset$, $w_P \geq w$ tel que $\alpha(W_P) = \{P\}$ et $w_Q \geq w$ tel que $\alpha(W_Q) = \{Q\}$. On a alors $w \models \neg(P \land Q)$ car dans aucun monde on n'a P et Q en même temps, mais $w \not\models \neg P \lor \neg Q$ car on a $w_P \geq w$ tel quel $w_P \models P$, et de même pour Q.
3. C'est dérivable :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg Q, P \vdash P} \quad \dfrac{}{\bot \vdash \bot}}{\neg P, \neg Q, P \vdash \bot} \qquad \dots}{\neg P, \neg Q, P \lor Q \vdash \bot}\lor_L}{\vdash \phi}\Rightarrow_R, \land_R, \Rightarrow_R$$

4. Ce n'est pas valide et le contre-modèle précédent fonctionne : on a déja vu $w \not\models P$ et $w \not\models \neg Q$, et on a de plus $w \not\models P \Rightarrow Q$ car on a un successeur (w_P) où P est satisfait mais pas Q.

5. C'est dérivable, vu en TD à peu de choses près : il fallait contracter la négation du tiers exclu en hypothèse, l'éliminer une première fois en choisissant $\neg P$ dans la disjonction, ce qui donne une hypothèse P qui permet de conclure après une seconde élimination sur la négation du tiers exclu.
6. Ce n'est pas valide. Le contre-modèle le plus simple est de prendre w tel que $\alpha(w) = \emptyset$ et $w_P \geq w$ tel que $\alpha(W_P) = \{P\}$. Aucun monde ne satisfait $P \Rightarrow Q$, donc tous les mondes satisfont $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$, donc w ne satisfait pas la formule.

Exercice 4

Si $\mathcal{I} : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$, on définit l'ensemble de littéraux $\Gamma_{\mathcal{I}}$:

$$\Gamma_{\mathcal{I}} \ = \ \{P \mid P \in \mathcal{P}, \mathcal{I}(P) = 1\} \ \cup \ \{\neg P \mid P \in \mathcal{P}, \mathcal{I}(P) = 0\}$$

Dans la suite, quand on écrit $\mathcal{I} \models \phi$, on parle bien sûr de la relation de satisfaction du calcul propositionnel classique.

1. Montrer que $\Gamma_{\mathcal{I}} \vdash_{LJ} \phi$ ssi $\mathcal{I} \models \phi$, et $\Gamma_{\mathcal{I}}, \phi \vdash_{LJ} \bot$ ssi $\mathcal{I} \not\models \phi$.
2. Soit ϕ une formule sur $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Montrer que ϕ est valide en logique classique ssi $(P_1 \vee \neg P_1) \Rightarrow (P_2 \vee \neg P_2) \Rightarrow \ldots (P_n \vee \neg P_n) \Rightarrow \phi$ est valide en logique intuitionniste.

Corrigé

1. On observe d'abord que chacune de ces équivalences a un sens facile : Si $\Gamma_{\mathcal{I}} \Rightarrow \phi$ est dérivable en LJ elle l'est aussi en LK et donc valide classiquement (on peut aussi utiliser le fait, vu en cours, que la validité intuitionniste implique la classique) et comme $\mathcal{I} \models \Gamma_{\mathcal{I}}$ on a $\mathcal{I} \models \phi$. De même, $\Gamma_{\mathcal{I}}, \phi \vdash_{LJ} \bot$ entraine $\mathcal{I} \not\models \phi$.

   On démontre les deux autres implications **simultanément** par une induction sur la structure de ϕ.
   - Si ϕ est un littéral on conclut aisément grâce à $\Gamma_{\mathcal{I}}$.
   - Si ϕ est $\phi_1 \wedge \phi_2$, et que $\mathcal{I} \models \phi$ alors $\mathcal{I} \models \phi_i$ pour tout $i \in \{1, 2\}$. Par hypothèse d'induction on a alors $\Gamma_{\mathcal{I}} \vdash_{LJ} \phi_i$ pour chaque i et on conclut grâce à la règle $\wedge_R$ (et des contractions pour $\Gamma_{\mathcal{I}}$). Si $\mathcal{I} \not\models \phi$ alors $\mathcal{I} \not\models \phi_i$ pour un i, on a $\Gamma_{\mathcal{I}}, \phi_i \vdash_{LJ} \bot$ par hypothèse d'induction et on conclut grâce aux règles $\wedge_L$ et affaiblissement.
   - Cas de la disjonction similaire.
   - Si ϕ est $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$, et $\mathcal{I} \models \phi$, on distingue deux cas. Si $\mathcal{I} \models \neg\phi_1$ alors par hypothèse d'induction on a $\Gamma_{\mathcal{I}}, \phi_1 \vdash_{LJ} \bot$ et on en déduit $\Gamma_{\mathcal{I}} \vdash \phi_1 \Rightarrow \phi_2$ par $\Rightarrow_R$, cut et $\bot_L$. Si $\mathcal{I} \models \phi_2$ alors on a $\Gamma_{\mathcal{I}} \vdash_{LJ} \phi_2$ et donc $\Gamma_{\mathcal{I}}, \phi_1 \vdash_{LJ} \phi_2$ par affaiblissement, et on conclut de nouveau par $\Rightarrow_R$. Si $\mathcal{I} \not\models \phi$ alors $\mathcal{I} \models \phi_1$ et $\mathcal{I} \not\models \phi_2$, donc par nos deux hypothèses d'induction $\Gamma_{\mathcal{I}} \vdash_{LJ} \phi_1$ et $\Gamma_{\mathcal{I}}, \phi_2 \vdash_{LJ} \bot$ d'où $\Gamma_{\mathcal{I}}, \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \vdash_{LJ} \bot$ par $\Rightarrow_L$ (et des contractions).
   - La négation est un cas particulier du cas précédent.
2. Appelons $\psi_{LEM} \Rightarrow \phi$ la seconde formule. On observe que si elle est valide en logique intuitionniste elle l'est aussi en logique classique, et comme l'hypothèse ψ_{LEM} est valide cela signifie que ϕ seule est valide. Pour l'autre implication on observe qu'on peut dériver $\psi_{LEM} \vdash \phi$ à partir de tous les $\Gamma_{\mathcal{I}} \vdash \phi$, en utilisant $\vee_L$ sur chaque $P_i \vee \neg P_i$. On conclut par la question 1.

3 Logique (classique) du premier ordre

Exercice 5

Dans cet exercice, les symboles de prédicats sont binaires (en nombre arbitraire) et l'ensemble de symboles de fonction est vide. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des formules du prermier ordre sans variable libre dont une forme prénexe est de la forme

$$\exists x_1, \ldots, \exists x_m, \forall y_1, \ldots, \forall y_n.\psi$$

où ψ est sans quantificateur (autrement dit, tout quantificateur existentiel précède tout quantificateur universel).

1. Montrer que toute formule $\phi \in \mathcal{B}$ qui est satisfaisable possède un modèle fini dont on bornera la taille (du domaine) en fonction de ϕ.
2. En déduire que le problème de la satisfaisabilité d'une formule de $\mathcal{B}$ est dans PSPACE.

Correction

1. Soit une telle formule, qu'on suppose satisfaisable. En skolémisant on préserve la satisfaisabilité et on introduit m constantes. On a obtenu une formule purement universelle satisfaisable, qui admet donc un modèle de Herbrand. Son domaine est induit par la signature : on n'a aucune fonction et m constantes, donc le domaine est de cardinal m.
2. On travaille directement sur la formule skolémisée, où les x_i sont directement considérés comme des constantes. On a donc fixé le domaine du modèle de Herbrand. Reste à traiter l'interprétation des prédicats. Pour chacun des k prédicats binaires, et chacun des m^2 couples de valeurs du domaine, on "devine" simplement si le prédicat est vrai en ces valeurs. Il reste à interpréter ϕ sans quantificateur, ce qui se fait en PSPACE. On a donc un algorithme en NPSPACE pour déterminer la non-satisfaisabilité (si un choix des interprétations mène à la valuation fausse, alors la formule est insatisfaisable) et on conclut en rappelant que NPSPACE = PSPACE = COPSPACE.